Última actualización: 6 de enero de 2022

Clase 29

Considere un número real positivo c, ¿se le ocurre una manera de calcular $\ln(c)$? Hasta el momento lo único que podríamos hacer es calcular una suma superior o una suma inferior para la función $1/t$ en el intervalo $[1, c]$ (o bien en el intervalo $[c, 1]$) para aproximar

$$\int_1^c \frac{1}{t}\, dt.$$

Ahora, si consideramos una función polinomial $p(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ y le pido calcular el valor de p en un número real c seguro sabrá qué hacer y, tal vez después de muchas cuentas, podría dar el valor de p en c.

Imagine ahora que podemos "aproximar" una función f "cerca" de un punto c mediante una función polinomial p. De esta manera podríamos dar valores "aproximados" a los que la función f asigna a puntos "cercanos" a c, mediante los valores que el polinomio p les asigna.

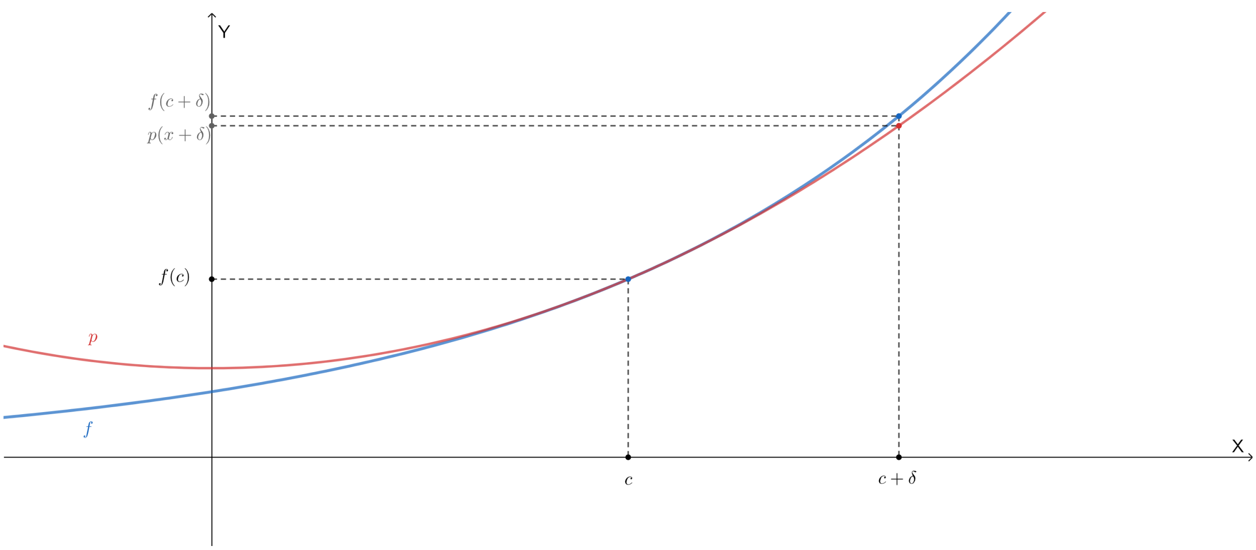

Figura 1: La función polinomial p se "aproxima" a la función f "cerca" de c y la difererencia entre $f(c + \delta)$ y $p(c + \delta)$ es muy "pequeña"

En este capítulo estudiaremos unos polinomios (funciones polinomiales) construidos a partir de una función dada en un punto dado, llamados Polinomios de Taylor.

Polinomios de Taylor

Consideremos una función polinomial

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Note que $p(0) = a_0$. Luego, derivando p, tenemos que

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1,$$

de donde $p'(0) = a_1$. Consideremos ahora la segunda derivada de p. Tenemos que

$$p''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots + 2a_2$$

y de aquí que $p''(0) = 2a_2$. Ahora, si recordamos que 1!=1 y 2!=2 y que p' y p'' se denotan también por $p^{(1)}$ y $p^{(2)}$ respectivamente, entonces tenemos que

$$a_1 = \frac{p^{(1)}(0)}{1!} \quad \text{y que} \quad a_2 = \frac{p^{(2)}(0)}{2!}.$$

Y en general, para $k \in \{1, 2, ..., n\}$, que

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}.$$

Note que, como $0! = 1$ y $p^{(0)} = p$, entonces la expresión anterior también vale para $k = 0$.

Ahora, si consideramos una función polinomial escrita en términos de la "variable" $(x - c)$, es decir, si p es como sigue

$$p(x) = a_n(x-c)^n + \cdots + a_2(x-c)^2 + a_1(x-c) + a_0,$$

entonces obtendríamos, para cada $k \in \{0, 1, ..., n\}$, que

$$a_k = \frac{p^{(k)}(c)}{k!}.$$

En ambos casos podemos escribir los coeficientes de las funciones polinomiales en términos de las primeras n derivadas del polinomio evaluadas, en el primer caso, en 0 y en el segundo caso evaluadas en c. De esta manera podemos pensar en una función que sea n veces derivable en un punto c y construir un polinomio que tenga coeficientes determinados por las primeras n derivadas de f en el punto c.

Definición 1 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ y $n \in \mathbb{N}$. Si f es n-veces derivable en c, definimos* ***el polinomio de Taylor*** *de grado n de f en c, denotado por $p_{n,f,c}(x)$, como*

$$p_{n,f,c}(x) = f(c) + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

En muchas ocasiones, si no hay confusión, escribiremos $p_{n,c}$ en vez de escribir $p_{n,f,c}$.

Ejemplo 2 *Halle el polinomio de Taylor de grado $2n + 1$ de la función* sen *en $c = 0$.*

Solución. Note que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(0) &= 0 \\
\operatorname{sen}'(0) &= \cos(0) = 1 \\
\operatorname{sen}''(0) &= -\operatorname{sen}(0) = 0 \\
\operatorname{sen}'''(0) &= -\cos(0) = -1 \\
\operatorname{sen}^{(4)}(0) &= \operatorname{sen}(0) = 0.
\end{aligned}$$

En general, se puede demostrar, para $k \in \{0, 1, ..., 2n+1\}$, que

$$\operatorname{sen}^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 4l, \text{con } l \in \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{si } k = 4l+1, \text{con } l \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } k = 4l+2, \text{con } l \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{si } k = 4l+3, \text{con } l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Así, para $k \in \{0, 1, ..., 2n\}$,

$$\frac{\operatorname{sen}^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 4l, \text{con } l \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{k!} & \text{si } k = 4l+1, \text{con } l \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } k = 4l+2, \text{con } l \in \mathbb{Z}, \\ \frac{-1}{k!} & \text{si } k = 4l+3, \text{con } l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$p_{2n+1,0}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

■

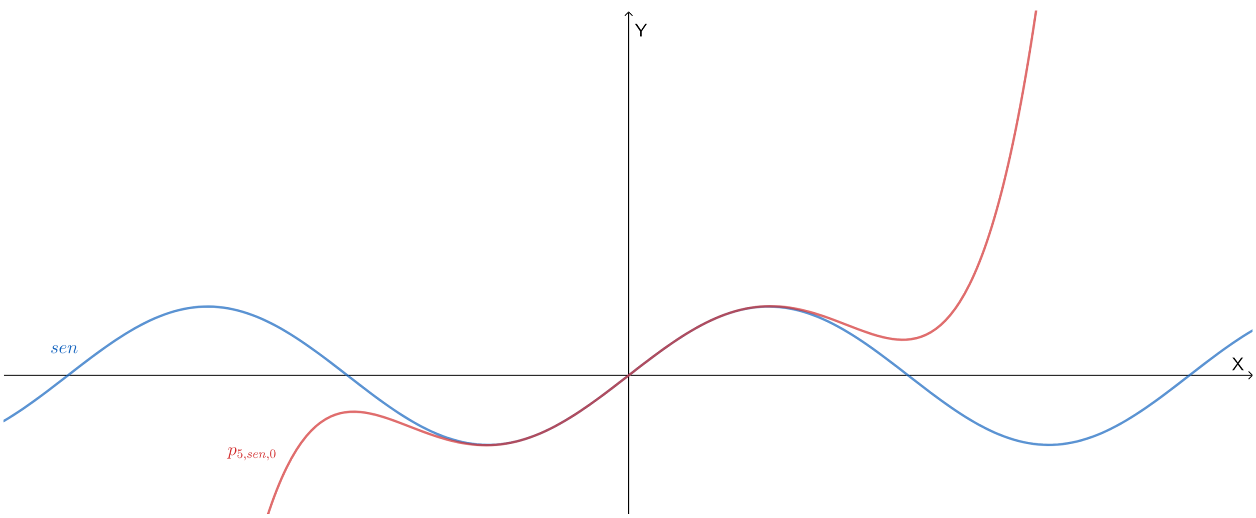

Figura 2: Se muestran las gráficas de sen y de $p_{5,\text{sen},0}$.

Ejemplo 3 *Halle el polinomio de Taylor de grado $2n$ de la función* cos *en $c = 0$.*

Solución. Note que

$$\begin{aligned} \cos(0) &= 1 \\ \cos'(0) &= -\operatorname{sen}(0) = 0 \\ \cos''(0) &= -\cos(0) = -1 \\ \cos'''(0) &= \operatorname{sen}(0) = 0 \\ \cos^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1. \end{aligned}$$

En general, se puede demostrar, para $k \in \{0, 1, ..., 2n\}$, que

$$\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 4l, \text{con } l \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } k = 4l+1, \text{con } l \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{si } k = 4l+2, \text{con } l \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } k = 4l+3, \text{con } l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Así, para $k \in \{0, 1, ..., 2n\}$,

$$\frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} \frac{1}{k!} & \text{si } k = 4l, \text{con } l \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } k = 4l+1, \text{con } l \in \mathbb{Z}, \\ \frac{-1}{k!} & \text{si } k = 4l+2, \text{con } l \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } k = 4l+3, \text{con } l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$p_{2n,0}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

$\blacksquare$

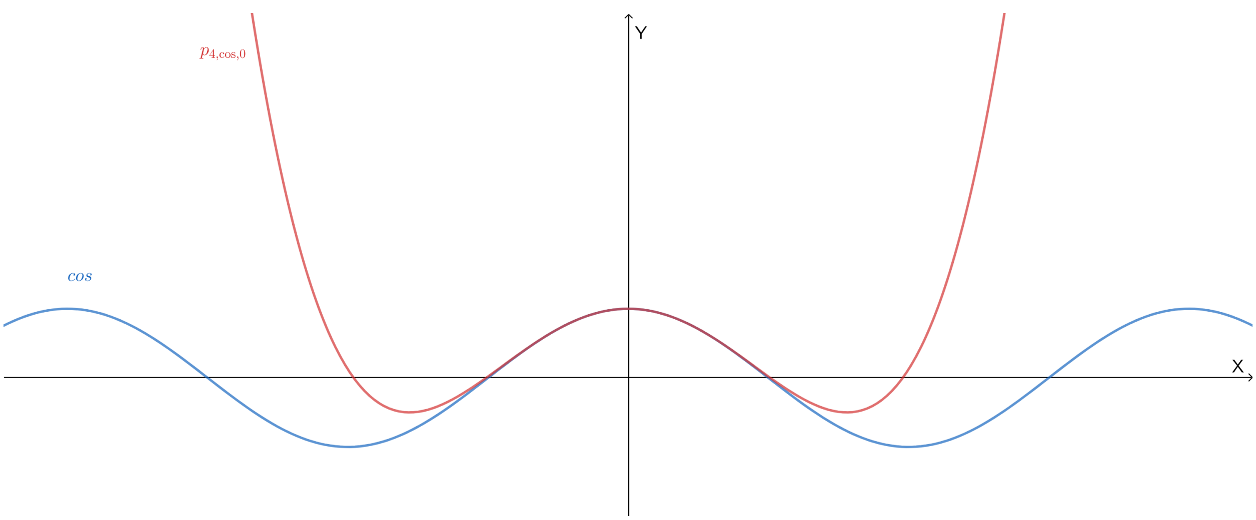

Figura 3: Se muestran las gráficas de cos y de $p_{4,\cos,0}$.

Ejemplo 4 *Halle el polinomio de Taylor de grado n de la función* exp *en $c = 0$.*

Solución. Note que $\exp(0) = 1$ y que $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ para toda $k \in \{1, 2, ..., n\}$, por lo que

$$p_{n,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

$\blacksquare$

Ejemplo 5 *Halle el polinomio de Taylor de grado n de la función* ln *en $c = 1$.*

Solución. Note que

$$\begin{aligned} \ln'(x) &= \frac{1}{x}, \\ \ln''(x) &= -\frac{1}{x^2}, \\ \ln'''(x) &= \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Se puede demostar que, para cada $k \in \{1, ..., n\}$,

$$\ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!}{x^k}.$$

Así, para cada $k \in \{1, ..., n\}$,

$$\frac{\ln^{(k)}(1)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Por lo tanto

$$P_{n,1}(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n.$$

■