Clase 30

En la sesión anterior definimos los polinomios de Taylor:

Definición 1 *Sean $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ y $n \in \mathbb{N}$. Si f es n-veces derivable en c, definimos **el polinomio de Taylor** de grado n de f en c, denotado por $p_{n,f,c}(x)$, como*

$$p_{n,f,c}(x) = f(c) + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Y calculamos, para algunas funciones, polinomios de Taylor de algunos grados y en algunos puntos:

- $p_{2n+1,\text{sen},0}(x) = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \dfrac{1}{7!}x^7 + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$
- $p_{2n,\cos,0}(x) = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{6!}x^6 + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$
- $P_{n,\exp,0}(x) = 1 + \dfrac{1}{1!}x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n.$
- $P_{n,\ln,1}(x) = (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n.$

En esta ocasión estudiaremos, entre otras cosas, la relación que hay entre un polinomio de Taylor, de cierto grado y en cierto punto, y la función que usamos para construir a dicho polinomio.

Igualdad hasta el orden n

Concluimos la clase anterior construyendo un polinomio de Taylor de una función en un punto $c \neq 0$, a saber el polinomio de Taylor de grado n de la función ln en $c = 1$. Es claro que no podíamos construir dicho polinomio en $c = 0$, pues la función ln no está definida en cero. Enseguida mostramos una manera de construir un polinomio de Taylor relacionado a ln en $c = 0$.

Ejemplo 2 *Halle el polinomio de Taylor de grado n de la función $f(x) = \ln(1+x)$ en $c = 0$.*

Solución. Note que

$$f^{(k)}(x) = \ln^{(k)}(1+x),$$

para cada $k \in \{1, ..., n\}$. Así,

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

para cada $k \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto

$$p_{n,0}(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

■

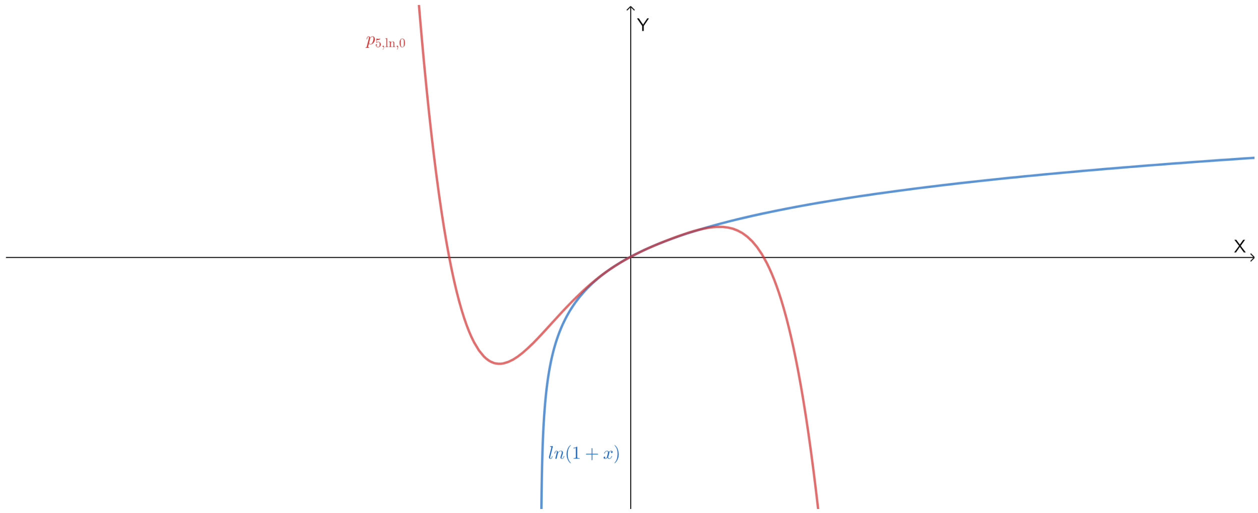

Figura 1: Se muestran las gráficas de $\ln(1+x)$ y de $p_{5,\ln(1+x),0}$.

Pero un polinomios de Taylor de una función f en un punto c, además de los coeficientes, ¿qué tienen que ver con f? Para responder esta pregunta consideremos una función $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $c \in (a,b)$ y $p_{1,f,c}$. Se tiene que

$$p_{1,f,c}(x) = f(c) + f'(c)(x-c).$$

Ahora, si $x \neq c$, tenemos que

$$\frac{f(x) - p_{1,f,c}(x)}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c).$$

De esta manera, tenemos que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - p_{1,f,c}(x)}{x-c} = \lim_{x\to c} \left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\right] = 0.$$

Este resultado nos indica que "cerca" de c la diferencia entre f y $p_{1,f,c}$ tiende a cero "más rápido" que la diferencia entre x y c.

Por ejemplo, si consideramos la función exp y $p_{1,\exp,0}$ entonces tenemos que

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - p_{1,\exp,0}(x)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x} = 0.$$

Pero, ¿qué tan "rápido" tiende a cero la diferencia entre f y $p_{1,f,c}$? ¿más "rápido" que $(x-c)^2$? Al menos con exp y $p_{1,\exp,0}$ esto no ocurre, pues

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - p_{1,\exp,0}(x)}{(x-0)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Note que en las últimas tres igualdades hemos utilizado la regla de L'Hôpital. ¿Y si ahora consideramos $p_{2,\exp,0}$? En este caso tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - p_{2,\exp,0}(x)}{(x-0)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \left(1+x+\frac{1}{2!}x^2\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0.$$

Una vez más, hemos utilizado la regla de L'Hôpital. En esta ocasión tenemos que "cerca" de c la diferencia entre f y $p_{2,f,c}$ tiende a cero "más rápido" que $(x-c)^2$. Esto sucede en general.

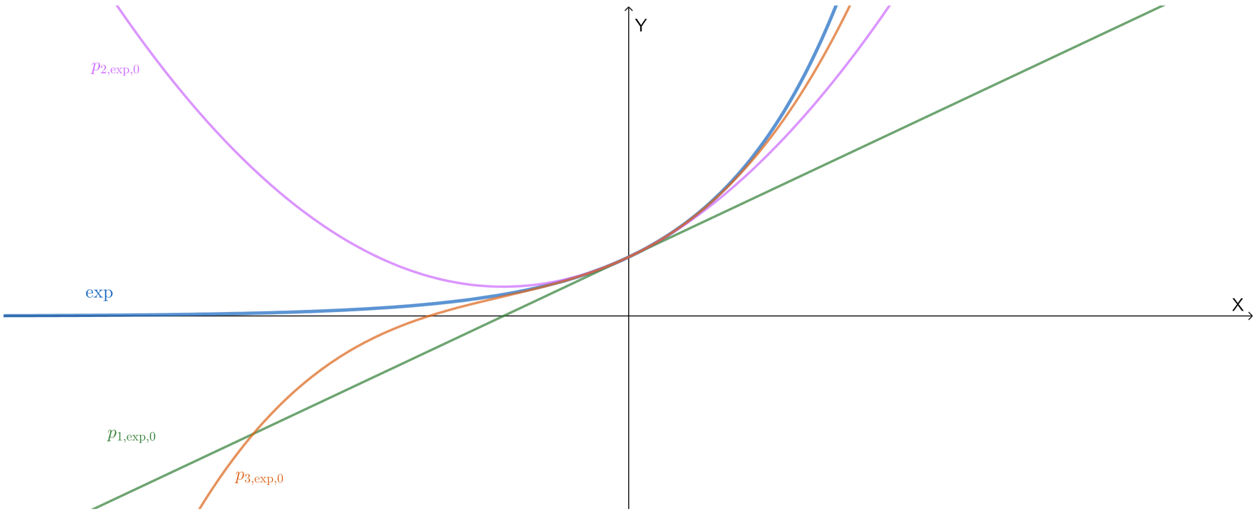

Figura 2: Se muestran las gráficas de exp, de $p_{1,\exp,0}$, $p_{2,\exp,0}$ y $p_{3,\exp,0}$.

Teorema 3 *Sean $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ y $n\in\mathbb{N}$. Si f es n-veces derivable en c, entonces*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-p_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n}=0.$$

Demostración. Note que

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-p_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n}&=\frac{f(x)-\left[f(c)+\frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n\right]}{(x-c)^n}\\&=\frac{f(x)-\left[f(c)+\frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}\right]}{(x-c)^n}-\frac{1}{n!}f^{(n)}(c).\end{aligned}$$

Así, si definimos las funciones $q,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ como

$$q(x)=f(c)+\frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}\quad\text{y}\quad g(x)=(x-c)^n,$$

lo que queremos demostrar es equivalente a demostar que

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-q(x)}{g(x)}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(c).$$

Pero note que las funciones q y g son funciones polinomiales por lo que son n veces derivables, y con derivadas continuas, de hecho, para cada $k\in\{1,...,n-1\}$ se tiene que

$$q^{(k)}(c)=f^{(k)}(c)\quad\text{y}\quad g^{(k)}(x)=\frac{n!}{(n-k)!}(x-c)^{n-k}.$$

Luego, usando, además de la continuidad de las derivadas de q y g, la continuidad de $f^{(k)}$ en c, para todo $k\in\{1,...,n-1\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} [f(x) - q(x)] &= f(c) - q(c) = 0 \\
\lim_{x \to c} \left[f'(x) - q'(x)\right] &= f'(c) - q'(c) = 0 \\
&\vdots \\
\lim_{x \to c} \left[f^{(n-1)}(x) - q^{(n-1)}(x)\right] &= f^{(n-1)}(c) - q^{(n-1)}(c) = 0,
\end{aligned}$$

y

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} g'(x) = \cdots = \lim_{x \to c} g^{(n-1)}(x) = 0.$$

Así que estamos en condiciones de aplicar la regla de L'Hôpital $(n-1)$-veces, de donde

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - q(x)}{(x-c)^n} = \cdots = \lim_{x \to c} \frac{f^{(n-1)}(x) - q^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(c)}{n!(x-c)} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c).$$

■

Definición 4 *Sean $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones y $c \in (a,b)$. Diremos que f y g son* ***iguales hasta el orden*** *n* ***en*** *c si*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - g(x)}{(x-c)^n} = 0.$$

Observación 5 *Sean $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que existe $p_{n,f,c}$. Por el Teorema 3, se tiene que f y $p_{n,f,c}$ son iguales hasta el orden n en c.*