Clase 31

Como cada sesión, iniciamos recordando algunas definiciones y resultados útiles para la sesión de hoy:

Definición 1 *Sean $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ y $n\in\mathbb{N}$. Si f es n-veces derivable en c, definimos* ***el polinomio de Taylor*** *de grado n de f en c, denotado por $p_{n,f,c}(x)$, como*

$$p_{n,f,c}(x)=f(c)+\frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Teorema 2 *Sean $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ y $n\in\mathbb{N}$. Si f es n-veces derivable en c, entonces*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-p_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n}=0.$$

Definición 3 *Sean $f,g:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones y $c\in(a,b)$. Diremos que f y g son* ***iguales hasta el orden n en c*** *si*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-g(x)}{(x-c)^n}=0.$$

¿Recuerda el "criterio de las caritas"? Es el criterio que establece que si en un punto crítico de una función f la segunda derivada es positiva, entonces f tiene un mínimo local en dicho punto critico y si la segunda derivada es negativa, entonces f tiene un máximo local en dicho punto critico. Por supuesto este criterio no siempre es útil, por ejemplo en la función $f(x)=x^4$ se tiene que $x=0$ es un punto crítico de f, más aún, es un mínimo local (de hecho es un mínimo global), pero esto no lo podemos concluir con este criterio pues $f'(0)=f''(0)=0$. El Teorema 2 nos permite mejorar este criterio.

Caritas recargadas y *unicidad* de los polinomios de Taylor

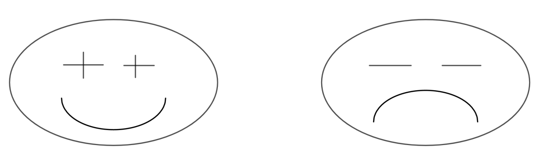

Figura 1: Una nemotecnia para recordar el criterio de la segunda derivada para hallar máximos y/o mínimos locales.

Teorema 4 *Sean $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ y $c\in(a,b)$ tales que*

$$f'(c)=\cdots=f^{(n-1)}(c)=0 \quad y \quad f^{(n)}(c)\neq 0.$$

(1) Si n es par y $f^{(n)}(c)>0$, entonces f tiene un mínimo local en c.

(2) Si n es par y $f^{(n)}(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c.

(3) Si n es impar, entonces f no tiene ni un mínimo local ni un máximo local en c.

Demostración. Consideremos la función $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - f(c)$. Note que $g^{(k)}(c) = f^{(k)}(c) = 0$ para toda $k \in \{1, ..., n-1\}$ y $g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) \neq 0$. Luego,

$$p_{n,g,c}(x) = g(c) + \frac{g'(c)}{1!}(x - c) + \cdots + \frac{g^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n = \frac{g^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Así, por el Teorema 2, tenemos que

$$0 = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - p_{n,g,c}(x)}{(x - c)^n} = \lim_{x \to c} \left[\frac{g(x)}{(x - c)^n} - \frac{g^{(n)}(c)}{n!} \right].$$

Y de aquí que

$$\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{(x - c)^n} = \frac{g^{(n)}(c)}{n!}. \tag{1}$$

(1) Supongamos que n es par y $g^{(n)}(c) > 0$. Como $g^{(n)}(c) > 0$, entonces $g^{(n)}(c)/n! > 0$, por lo que, de la igualdad (1), se sigue que existe $\delta > 0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \subseteq (a, b)$ y para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$ se tiene que

$$\frac{g(x)}{(x - c)^n} > 0.$$

Ahora, como n es par, tenemos que $(x - c)^n > 0$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$ por lo que $g(x) > 0$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$, es decir,

$$f(x) > f(c),$$

para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$. Esto es, f tiene un mínimo local en c.

(2) Supongamos que n es par y $g^{(n)}(c) < 0$. En este caso se tiene que $g^{(n)}(c)/n! < 0$, por lo que, de la igualdad (1), se sigue que existe $\delta > 0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \subseteq (a, b)$ y para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$ se tiene que

$$\frac{g(x)}{(x - c)^n} < 0.$$

Ahora, como n es par, tenemos que $(x - c)^n > 0$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$ por lo que $g(x) < 0$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$, es decir,

$$f(x) < f(c),$$

para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$. Esto es, f tiene un máximo local en c.

(3) Supongamos ahora que n es impar. Si $g^{(n)}(c) < 0$, entonces $g^{(n)}(c)/n! < 0$, por lo que, de la igualdad (1), se tiene que existe $\delta > 0$ tal que $(c-\delta, c+\delta) \subseteq (a, b)$ y para todo $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ se tiene que

$$\frac{g(x)}{(x - c)^n} < 0.$$

Note que $(x - c)^n > 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$ por lo que $g(x) < 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$, es decir,

$$f(x) < f(c),$$

para todo $x \in (c, c+\delta)$. Ahora, como n es impar, tenemos que $(x-c)^n < 0$ para todo $x \in (c-\delta, c)$ por lo que $g(x) > 0$ para todo $x \in (c-\delta, c)$, es decir,

$$f(x) > f(c),$$

para todo $x \in (c-\delta, c)$. Así, f no tiene ni un máximo ni un mínimo local en c.
Finalmente, note que si $g^{(n)}(c) > 0$ el resultado se obtiene de manera similar.

■

Ejemplo 5 *Demuestre que la función* $f(x) = x^4$ *tiene un mínimo local en* 0.

Solución. Note $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ y $f^{(4)}(0) = 24$. Así, por el inciso (1) del Teorema 4, tenemos que f tiene un mínimo local en 0. ■

Lema 6 *Sean* $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Si*

$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{(x-c)^n} = 0,$$

entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{(x-c)^i} = 0,$$

para todo $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Demostración. Note que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{(x-c)^i} &= \lim_{x\to c} \left[\frac{g(x)}{(x-c)^i} \cdot \frac{(x-c)^{n-i}}{(x-c)^{n-i}}\right] \\
&= \lim_{x\to c} \left[\frac{g(x)}{(x-c)^n} \cdot (x-c)^{n-i}\right] \\
&= \left[\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{(x-c)^n}\right] \cdot \left[\lim_{x\to c} (x-c)^{n-i}\right] \\
&= 0 \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Teorema 7 *Sean* $p(x) = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_n(x-c)^n$ *y* $q(x) = b_0 + b_1(x-c) + \cdots + b_n(x-c)^n$ *dos funciones polinomiales iguales hasta el orden* n *en* c. *Entonces* $p = q$.

Demostración. Consideremos la función polinomial $r = p - q$, esto es,

$$r(x) = c_0 + c_1(x-c) + \cdots + c_n(x-n)^n$$

donde $c_k = a_k - b_k$ para cada $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Como p y q son iguales hasta el orden n en c, entonces

$$0 = \lim_{x\to c} \frac{p(x) - q(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x\to c} \frac{r(x)}{(x-c)^n}.$$

Note que r satisface las hipótesis del Lema 6 así que aplicando dicho lema, para $i = 0$, tenemos que

$$0 = \lim_{x\to c} \frac{r(x)}{(x-c)^0} = \lim_{x\to} r(x) = \lim_{x\to c} c_0 + c_1(x-c) + \cdots + c_n(x-n)^n = c_0,$$

es decir, $c_0 = 0$. Se sigue que $r(x) = c_1(x-c) + \cdots + c_n(x-n)^n$. Luego, aplicando el Lema 6 para $i = 1$, tenemos que

$$0 = \lim_{x \to c} \frac{r(x)}{(x-c)^1} = \lim_{x \to c} \frac{c_1(x-c) + \cdots + c_n(x-n)^n}{x-c} = \lim_{x \to c} c_1 + c_2(x-c) \cdots + c_n(x-n)^{n-1} = c_1.$$

De donde $c_1 = 0$. Continuando de esta manera, tenemos que $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$, es decir $a_k = b_k$ para toda $k \in \{0, 1, ..., n\}$, de donde $p = q$. ■

Como consecuencia de este teorema obtenemos una propiedad de los polinomios de Taylor, un tipo de unicidad.

Corolario 8 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que existe $p_{n,f,c}$. Si $p(x) = a_0 + a_1(x - c) + \cdots + a_n(x-c)^n$ es una función polinomial igual a f hasta el orden n en c, entonces*

$$p = p_{n,f,c}.$$

Demostración. Note que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} \frac{p(x) - p_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n} &= \lim_{x \to c} \left[\frac{p(x) - f(x)}{(x-c)^n} + \frac{f(x) - p_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n} \right] \\
&= \left[\lim_{x \to c} \frac{p(x) - f(x)}{(x-c)^n} \right] + \left[\lim_{x \to c} \frac{f(x) - p_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n} \right] \\
&= 0 + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Es decir, p y $p_{n,f,c}$ son iguales hasta el orden n en c. Así, del Teorema 7, se sigue que $p = p_{n,f,c}$. ■