Clase 32

En esta ocasión conviene recordar una definición y un resultado vistos antes:

Definición 1 *Sean $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ y $n\in\mathbb{N}$. Si f es n-veces derivable en c, definimos* ***el polinomio de Taylor*** *de grado n de f en c, denotado por $p_{n,f,c}(x)$, como*

$$p_{n,f,c}(x)=f(c)+\frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x-c)+\frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Corolario 2 *Sean $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ y $n\in\mathbb{N}$ tales que existe $p_{n,f,c}$. Si $p(x)=a_0+a_1(x-c)+\cdots+a_n(x-c)^n$ es una función polinomial igual a f hasta el orden n en c, entonces*

$$p=p_{n,f,c}.$$

Dada una función y su polinomio de Taylor, de cierto grado y en cierto punto, ¿qué tanto se "pareceran" alrededor de dicho punto? Esta diferencia resultará importante, por lo que tiene nombre, el título de esta clase.

El Resto

El Corolario 2 puede ser usado para calcular algunos polinomios de Taylor.

Ejemplo 3 *Halle el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ de la función $\arctan(x)$ en 0.*

Solución. Igual que en los primeros ejemplos, uno intenta deducir una expresión para la k-ésima derivada, veamos qué tal nos va. Se tiene que

$$\begin{aligned}\arctan'(x)&=\frac{1}{1+x^2}\\ \arctan''(x)&=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\\ \arctan'''(x)&=\frac{-2\left(1+x^2\right)^2+8x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}\end{aligned}$$

y desde este último calculo podemos notar que este no es precisamente el mejor camino para hallar $p_{2n+1,\arctan,0}$. Pensemos de otra manera entonces. Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\arctan(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Por otro lado, como

$$\left(1+t^2\right)\left(1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^nt^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\right)=1,$$

entonces

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^nt^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Y de aquí que

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\right)\,dt \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.
\end{aligned}$$

Ahora, note que

$$\left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right| \leq \left|\int_0^x t^{2n+2}\,dt\right| = \left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right|,$$

por lo que

$$\left|\frac{\arctan(x) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)}{x^{2n+1}}\right| \leq \left|\frac{x^2}{2n+3}\right|.$$

Y de aquí que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)}{x^{2n+1}} = 0.$$

Luego, por el Corolario 2, tenemos que

$$p_{2n+1,\arctan,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

■

En en ejemplo anterior podemos notar que

$$|\arctan(x) - p_{2n+1,\arctan,0}(x)| = \left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right| \leq \left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right|,$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Ahora, si consideramos $x \in \mathbb{R}$ con $|x| \leq 1$, tenemos que

$$|\arctan(x) - p_{2n+1,\arctan,0}(x)| \leq \left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Por lo tanto, para $x \in \mathbb{R}$, con $|x| \leq 1$, podemos usar el polinomio de Taylor de grado 2n+1, con $n \in \mathbb{N}$ adecuado, para aproximar el valor de $\arctan(x)$ con un "error" tan pequeño como queramos.

Definición 4 *Sean $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $p_{n,f,c}$ existe. Definimos* ***el resto de grado** n **de** f **en** c, denotado por $R_{n,f,c}(x)$, como la función $R_{n,f,c} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$R_{n,f,c}(x) = f(x) - p_{n,f,c}(x).$$

Observación 5 *Note que, mientras los polinomios de Taylor están definidos en todo $\mathbb{R}$, los restos tienen como dominio el dominio de f.*

Con esta nueva terminología tenemos que

$$R_{2n+1,\arctan,0}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt.$$

Y gracias a esta expresión pudimos notar que para $x \in \mathbb{R}$, con $|x| \leq 1$, podemos aproximar el valor de $\arctan(x)$ tanto como queramos. La pregunta natural es si es posible escribir cualquier resto de esta manera, la respuesta la proporciona el siguiente Teorema.

Teorema 6 (Forma integral del resto) *Sean $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ y $n \in \mathbb{N}$. Si para $x \in (c,b)$ existe $f^{(n+1)}$ en $[c,x]$ y es continua en $[c,x]$, entonces*

$$R_{n,f,c}(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt.$$

Demostración. Usaremos inducción matemática sobre n para demostrar esta afirmación.
Consideremos una función $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$ y $x \in (c,b)$ de tal manera que existe f'' en $[c,x]$ y que además es continua en $[c,x]$.
Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)\, dt. \tag{1}$$

Ahora, utilizando el Teorema de Integración por Partes de la siguiente manera: $u(t) = f'(t)$, $v'(t) = 1$, $u'(t) = f''(t)$ y considerando función $v(t) = t - x$ (note que aquí x es una constante). Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_c^x f'(t)\, dt &= u(t)v(t)\Big|_c^x - \int_c^x u'(t)v(t)\, dt \\
&= u(x)v(x) - u(c)v(c) - \int_c^x f''(t)(t-x)\, dt \\
&= -f'(c)(c-x) + \int_c^x f''(t)(x-t)\, dt \\
&= f'(c)(x-c) + \int_c^x f''(t)(x-t)\, dt.
\end{aligned}$$

Así que, sustituyendo en la ecuación (1), tenemos que

$$f(x) - f(c) = f'(c)(x-c) + \int_c^x f''(t)(x-t)\, dt,$$

es decir que

$$f(x) - \big[f(c) - f'(c)(x-c)\big] = \int_c^x f''(t)(x-t)\ dt.$$

Esto es,

$$R_{1,f,c}(x) = \int_c^x f''(t)(x-t)\ dt.$$

Lo que demuestra nuestra base de inducción.

Supongamos ahora que para cualquier función $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existe $g^{(n)}$ en $[c,x]$ y es continua en $[c,x]$, se tiene que

$$R_{n-1,g,c}(x) = \int_c^x \frac{g^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt$$

y sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que existe $f^{(n+1)}$ en $[c,x]$ y que es continua en $[c,x]$. Como existe $f^{(n+1)}$ en $[c,x]$, entonces existe $f^{(n)}$ en $[c,x]$ y además es continua, por lo que usando la hipótesis de inducción tenemos que

$$R_{n-1,f,c}(x) = \int_c^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt.$$

Ahora, usando el Teorema de Integración por Partes, de la siguiente manera: $u(t) = f^{(n)}(t)$, $v'(t) = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$, $u'(t) = f^{(n+1)}(t)$ y $v(t) = -\dfrac{(x-t)^n}{n!}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
R_{n-1,f,c}(x) &= \int_c^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\ dt. \\
&= u(t)v(t)\Big|_c^x - \int_c^x u'(t)v(t)\ dt \\
&= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ dt.
\end{aligned}$$

Y como $R_{n-1,f,c}(x) = f(x) - p_{n-1,f,c}(x)$, entonces

$$f(x) - \left[p_{n-1,f,c}(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n\right] = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ dt.$$

Es decir,

$$f(x) - p_{n,f,c}(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ dt.$$

De donde

$$R_{n,f,c}(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \; dt.$$

Con lo que terminamos nuestra demostración. ■