Última actualización: 13 de enero de 2022

Clase 33

En esta ocasión conviene recordar una definición y un resultado vistos antes:

Definición 1 *Sean $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ y $n\in\mathbb{N}$ tales que $p_{n,f,c}$ existe. Definimos* ***el resto de grado n de f en c****, denotado por $R_{n,f,c}(x)$, como la función $R_{n,f,c}:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por*

$$R_{n,f,c}(x)=f(x)-p_{n,f,c}(x).$$

Teorema 2 (Forma integral del resto) *Sean $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ y $n\in\mathbb{N}$. Si para $x\in(c,b)$ existe $f^{(n+1)}$ en $[c,x]$ y es continua en $[c,x]$, entonces*

$$R_{n,f,c}(x)=\int_c^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

En el Teorema 2 se mostró la posibilidad, bajo ciertas hipótesis, de utilizar una integral para expresar el resto. En esta ocasión exhibiremos una forma de expresar el resto en términos de una derivada.

El Teorema de Taylor

Lema 3 *Sean $c\in(a,b)$ y $R:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función que es $(n+1)$-veces derivable en (a,b) y que*

$$R^{(k)}(c)=0$$

para toda $k\in\{0,1,...,n\}$. Entonces, para cualquier $x\in(c,b)$, existe $t\in(c,x)$ tal que

$$\frac{R(x)}{(x-c)^{n+1}}=\frac{R^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}.$$

Demostración. Demostraremos esta afirmación usando inducción matemática.
Si $R:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función derivable en (a,b) que satisface, para $c\in(a,b)$, que $R(c)=0$, entonces para cada $x\in(c,b)$, por el Teorema del Valor Medio aplicado a R en el intervalo $[c,x]$, tenemos que existe $t\in(c,x)$ tal que

$$\frac{R(x)-R(c)}{x-c}=R'(t),$$

es decir,

$$\frac{R(x)}{x-c}=R'(t).$$

Lo que demuestra nuestra base de inducción.

Ahora supongamos que para cualquier función $Q:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ que es n-veces derivable en (a,b), que satisface que

$$Q^{(k)}(c)=0,$$

para toda $k\in\{0,1,...,n-1\}$ se cumple que para cualquier $x\in(c,b)$ existe $t\in(c,x)$ tal que

$$\frac{Q(x)}{(x-c)^n} = \frac{Q^{(n)}(t)}{n!}.$$

Luego, consideremos $R : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $(n+1)$-veces derivable en (a,b) que satisface que

$$R^{(k)}(c) = 0$$

para toda $k \in \{0, 1, ..., n\}$ y sea $x \in (c,b)$. Aplicando el Teorema del Valor Medio de Cauchy a las funciones R y $g(x) = (x-c)^{n+1}$ en el intervalo $[c,x]$, tenemos que existe $l \in (c,x)$ tal que

$$\frac{R(x) - R(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{R'(l)}{g'(l)},$$

es decir,

$$\frac{R(x)}{(x-c)^{n+1}} = \frac{R'(l)}{(n+1)(l-c)^n}. \tag{1}$$

Ahora, si consideramos la función $Q : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(x) = R'(x)$, entonces Q satisface la hipótesis de inducción, por lo que, para $l \in (c,x)$ se tiene que existe $t \in (c,l)$ tal que

$$\frac{Q(l)}{(l-c)^n} = \frac{Q^{(n)}(t)}{n!},$$

es decir,

$$\frac{R'(l)}{(l-c)^n} = \frac{R^{(n+1)}(t)}{n!}. \tag{2}$$

Finalmente de las ecuaciones (1) y (2), tenemos que

$$\frac{R(x)}{(x-c)^{n+1}} = \frac{R'(l)}{(n+1)(l-c)^n} = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{R^{(n+1)}(t)}{n!} = \frac{R^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}.$$

Lo que concluye nuestra prueba. ■

Teorema 4 (de Taylor) *Sean $c \in (a,b)$ y $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $(n+1)$-veces derivable en (a,b). Entonces, para cada $x \in (c,b)$ existe $t \in (c,x)$ tal que*

$$R_{n,f,c}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

(a esta expresión para el resto se le conoce como la forma de Lagrange del resto).

Demostración. Recuerde que $R_{n,f,c} = f - p_{n,f,c}$, por lo que $R_{n,f,c}$ es $(n+1)$-veces derivable en (a,b) y note que

$$R^{(k)}(c) = f^{(k)}(c) - p^{(k)}_{n,f,c}(c) = 0,$$

para cada $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Es decir, $R_{n,f,c}$ satisface las hipótesis del Lema 3, por lo que, para cada $x \in (c,b)$, se tiene que existe $t \in (c,x)$ tal que

$$\frac{R_{n,f,c}(x)}{(x-c)^{n+1}} = \frac{R^{(n+1)}_{n,f,c}(t)}{(n+1)!}.$$

Pero $R_{n,f,c}^{(n+1)} = f^{(n+1)} - p_{n,f,c}^{(n+1)} = f^{(n+1)}$, pues $p_{n,f,c}$ es un polinomio de grado a lo más n. Así que

$$\frac{R_{n,f,c}(x)}{(x-c)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!},$$

es decir,

$$R_{n,f,c}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

■