Última actualización: 14 de enero de 2022

Clase 34

Para esta sesión hay mucho que recordar:

Definición 1 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ y $n \in \mathbb{N}$. Si f es n-veces derivable en c, definimos* ***el polinomio de Taylor*** *de grado n de f en c, denotado por $p_{n,f,c}(x)$, como*

$$p_{n,f,c}(x) = f(c) + \frac{f^{(1)}(c)}{1!}(x - c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x - c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Definición 2 *Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $p_{n,f,c}$ existe. Definimos* ***el resto de grado n de f en c****, denotado por $R_{n,f,c}(x)$, como la función $R_{n,f,c} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$R_{n,f,c}(x) = f(x) - p_{n,f,c}(x).$$

Teorema 3 (de Taylor) *Sean $c \in (a, b)$ y $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $(n + 1)$-veces derivable en (a, b). Entonces, para cada $x \in (c, b)$ existe $t \in (c, x)$ tal que*

$$R_{n,f,c}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}.$$

En esta ocasión mostraremos una manera de aplicar la teoría sobre polinomios de Taylor desarrollada en clases anteriores.

Algunas aplicaciones de los polinomios de Taylor

Ejemplo 4 *Acote el resto indicado de cada una de las funciones de los siguientes incisos:*

(1) seno, de grado $2n + 1$ en $c = 0$.

(2) coseno, de grado $2n$ en $c = 0$.

(3) exponencial, de grado n en $c = 0$.

Solución. Note que las funciones de los tres incisos son n-veces derivables, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, en todo $\mathbb{R}$, así que podemos aplicar el Teorema de Taylor en $c = 0$. Así, para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene que:

(1) Existe $t \in (0, x)$ (o bien $t \in (x, 0)$ (¿si?)) tal que

$$R_{\text{sen},2n+1,0}(x) = \frac{\text{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n + 2)!}x^{2n+2}.$$

Ahora, como $|\,\text{sen}(\alpha)| \leq 1$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$|R_{\text{sen},2n+1,0}(x)| = \left|\frac{\text{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n + 2)!}x^{2n+2}\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n + 2)!}. \tag{1}$$

(2) Existe $t \in (0, x)$ (o bien $t \in (x, 0)$ (¿también aquí?)) tal que

$$R_{\cos,2n,0}(x) = \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Luego, dado que $|\cos(\alpha)| \leq 1$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$|R_{\cos,2n,0}(x)| = \left| \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{2}$$

(3) En este inciso supondremos que $x > 0$, pues el caso en que $x \leq 0$ se tratará en la ayudantía. Se tiene que existe $t \in (0, x)$ tal que

$$R_{n,\exp,0}(x) = \frac{e^t}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Ahora, dado que exp es una función creciente y $t < x$, se tiene que

$$0 < R_{n,\exp,0}(x) = \frac{e^t}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Luego, usando que $e < 4$, se tiene que

$$0 < R_{n,\exp,0}(x) < \frac{4^x}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Finalmente, si suponemos que $0 < x \leq 1$, se tiene que

$$0 < R_{n,\exp,0}(x) < \frac{4}{(n+1)!}. \tag{3}$$

■

Aprovechando el ejemplo anterior, note que:

- $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$.
- $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.
- $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^t}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Pero, ¿de qué nos sirven las *cotas* anteriores?

Ejemplo 5 *Aproxime el valor de* sen(2) *con un "error" menor a* 0.0001.

Solución. De (1), se tiene que

$$|R_{2n+1,\operatorname{sen},0}(2)| \leq \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Así, para que la diferencia (el "error") sea menor a $0.0001 = 10^{-4}$, es suficiente hallar un número $n \in \mathbb{N}$ que cumpla que

$$\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-4}.$$

Se puede verificar que, con $n = 5$,

$$\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{2^{12}}{12!} < 10^{-4}.$$

Así, $\operatorname{sen}(2) = p_{11,\mathrm{sen},0}(2) + R_{11,\mathrm{sen},0}(2)$, donde $R_{11,\mathrm{sen},0}(2) < 0.0001$. Finalmente, con algo de esfuerzo, se tiene que

$$p_{11,\mathrm{sen},0}(2) = 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^3}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} = \frac{141782}{155925},$$

de donde

$$\operatorname{sen}(2) \approx \frac{141782}{155925}$$

con un "error" menor a 0.0001. ■

Ejemplo 6 *Aproxime el valor de* $\cos(1)$ *con un "error" menor a* 0.0001.

Solución. De (2), se tiene que

$$|R_{\cos,2n,0}(1)| \leq \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Así, para que la diferencia (el "error") sea menor a $0.0001 = 10^{-4}$, es suficiente hallar un número $n \in \mathbb{N}$ que cumpla que

$$\frac{1}{(2n+1)!} < 10^{-4}.$$

En este caso, si $n = 4$, se tiene que

$$\frac{1}{(2n+1)!} = \frac{1}{9!} < 10^{-4}.$$

Por lo que, $\cos(1) = p_{8,\cos,0}(1) + R_{8,\cos,0}(1)$, donde $R_{8,\cos,0}(1) < 0.0001$. Finalmente, se tiene que

$$p_{8,\cos,0}(1) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} = \frac{4357}{8064},$$

de donde

$$\cos(1) \approx \frac{4357}{8064}$$

con un "error" menor a 0.0001. ■

Ejemplo 7 *Dé una aproximación a* e *"mejor" que* 2 *o* 4.

Solución. Sabemos, por (3), que para $0 < x \leq 1$,

$$0 < R_{n,\exp,0}(x) < \frac{4}{(n+1)!}.$$

En particular, para $x = 1$ y con $n = 4$ se tiene que

$$0 < R_{n,\exp,0}(1) < \frac{4}{(n+1)!} = \frac{4}{5!} < \frac{1}{10} = 0.1.$$

Así,

$$\begin{aligned} e &= p_{4,\exp,0}(1) + R_{4,\exp,0}(1) \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + R_{4,\exp,0}(1) \\ &= \frac{65}{24} + R_{4,\exp,0}(1), \end{aligned}$$

con $0 < R_{4,\exp,0}(1) < 0.1$. Es decir,

$$e \approx \frac{65}{24} = 2.708\overline{3},$$

con un "error" menor a 0.1. Por lo tanto

$$2 < e < 3.$$

■

Teorema 8 *El número e es irracional.*

Demostración. Supongamos que no es así, es decir que e es un número racional, esto es, existen $p, q \in \mathbb{N}$ con $e = \frac{p}{q}$. Por otro lado, sabemos que

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n,\exp,0}(1),$$

con $0 < R_{n,\exp,0}(1) < \frac{4}{(n+1)!}$. Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n,\exp,0}(1), \tag{4}$$

con

$$0 < R_{n,\exp,0}(1) < \frac{4}{(n+1)!}. \tag{5}$$

Consideremos ahora $n \in \mathbb{N}$ de tal manera que $n > q$ y $n > 4$. Se sigue de (4) que

$$\frac{n!p}{q} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!R_{n,\exp,0}(1)$$

y de aquí que $n!R_{n,\exp,0}(1) \in \mathbb{Z}$. Pero note que de (5) se tiene que

$$0 < n!R_{n,\exp,0}(1) < \frac{4}{n+1} < 1,$$

es decir, un número entero mayor que cero y menor que uno, un absurdo. Así, $e \notin \mathbb{Q}$. ■