Ayudantía 26
Sucesiones

Ejercicio 1. *Demuestre que:*

(i). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

(ii). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Demostración. El objetivo de este ejercicio es ilustrar las estrategias para obtener cotas, por lo cual la prueba se hará usando la definición.

(i) Sea $\varepsilon > 0$. Notamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Ahora, por la propiedad arquimediana, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N_0+1} < \varepsilon$. Por lo anterior, si $N = N_0$, entonces para $n \geq N$ se cumple que $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1}$, de donde

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, por definición, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

(ii) Notamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{1}{n} < \frac{1}{n}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces por la propiedad arquimediana existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Proponemos $N = N_0$. Luego, si $n \geq N$, se cumple que

$$\left|\frac{n!}{n^n} - 0\right| = \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Finalmente, por definición se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. ■

Ejercicio 2. *Calcule los siguientes límites.*

(i). $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}\right)$.

(ii). $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}$.

Demostración. (i) Ya sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Ahora, como para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\frac{n}{n+1} \neq 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{1} = 1$$

en virtud del **Teorema 4** de la **Clase 36** (que trata sobre la *aritmética de límites de sucesiones*). Finalmente, por ese mismo teorema obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}\right) = 1 - 1 = 0$$

porque ambos límites existen.

(ii) Notamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} &= \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} \cdot \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} \\ &= \frac{1 + \frac{(-1)^n}{2^n}}{2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}}.\end{aligned}$$

Notamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n \leq 2^n$, de donde $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$, lo cual implica que

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$$

y ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

entonces por el Teorema de aritmética de límites de sucesiones (**Teorema 4** de la **Clase 36**) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n},$$

así que por el **Teorema del sándwich** (ver **Teorema 3** de la **Clase 37**) se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0.$$

Ahora, por el Teorema de aritmética de límites de sucesiones (en particular, al usar el inciso de multiplicar por una constante), obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} (-1)\frac{(-1)^n}{2^n} = 0.$$

También, observamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} = 2 \neq 0$, así que, nuevamente, por el Teorema de aritmética de límites de sucesiones obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}} \right) = \frac{1}{2}$. Finalmente, a partir del ya mencionado teorema obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) \frac{1}{2 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

porque $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) = 1$. ■

Continuamos por algunos resultados acerca de sucesiones.

Lema 3. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente. Para toda $k \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo. Denotemos $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$, entonces $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Ahora, si $n \geq N_0$, entonces $n + k \geq N_0$, por lo cual se cumple que $|a_{n+k} - \ell| < \varepsilon$ para toda $n + k \geq N_0$. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k} = \ell$. ■