Ayudantía 27
Divergencia a infinito. Sucesiones e integrales.

Ejercicio 1. *(i). Pruebe que si* $0 < a < 2$, *entonces* $a < \sqrt{2a} < 2$.

(ii). Pruebe que la sucesión definida por $a_1 = \sqrt{2}$ *y* $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ *si* $n \geq 1$, *es convergente.*

(iii). Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Demostración. (i) Como $0 < a < 2$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{2}$, de donde

$$a = \sqrt{a}\sqrt{a} < \sqrt{2}\sqrt{a} < \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$$

como se deseaba.

(ii) Notamos que $\sqrt{2} = a_1 < \sqrt{2a_1} = a_2 < 2$ en virtud del inciso anterior. Inductivamente obtenemos que $a_n < a_{n+1} < 2$ (escriba la prueba por inducción). Por lo tanto, $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente (por 2). Luego, por un teorema sabemos que si cualquier sucesión creciente y acotada superiormente es convergente, así que $\{a_n\}$ es convergente.

(iii) Denotemos $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. En virtud del **Lema 3** de la **Ayudantía 26** tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \ell$ (aquí $k = 1$). Ahora, se cumple que

$$\begin{aligned}\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\sqrt{a_n} \\ &= \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{\ell} = \sqrt{2\ell},\end{aligned}$$

donde el segundo renglón se obtiene por el Teorema de equivalencia de límites de funciones y límites de sucesiones porque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. A partir de lo anterior, $\ell = \sqrt{2\ell}$, esto es, $\ell^2 = 2\ell$, de donde $\ell = 2$. (¿Por qué no ocurre $\ell = 0$?) Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. ∎

Definición 2. Sea $\{a_n\}$ una sucesión.

(i). Decimos que $\{a_n\}$ **diverge a infinito**, que denotamos por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, si para toda $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $a_n > M$.

(ii). Decimos que $\{a_n\}$ **diverge a menos infinito**, que denotamos por $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, si para toda $M < 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $a_n < M$.

Lema 3. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Demostración. Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, hay a lo más una cantidad finita de términos tales que $a_n = 0$, ya que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $a_n > 1$. Por ello, podemos suponer sin pérdida de generalidad que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $a_n \neq 0$ (en caso necesario tomamos una subsucesión).

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ entonces $a_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Esto implica que $|a_n| = a_n$ si $n \geq N_0$. Proponemos $N = N_0$. Así, si $n \geq N$, entonces

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{|a_n|} = \frac{1}{a_n} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. ■

Ejemplo 4. (i). Es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ (¿puede demostrarlo?), por lo cual $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Note que este resultado ya lo conocíamos.

(ii). Como $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

(iii). Tenemos que si $a > 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ (demuestre este hecho), así que por el Lema anterior se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$.

(iv). Sean p y q dos polinomios. Si $\mathrm{grad}(p) > \mathrm{grad}(q)$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \infty$ (¿por qué?). Luego, el Lema implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q(n)}{p(n)} = 0$.

Observación 5. El recíproco del Lema anterior es FALSO.

Demostración. Consideremos la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$. Notamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Sin embargo, $\{\frac{1}{a_n}\} = \{(-1)^n n\}$ NO diverge a infinito. ■

Pregunta. *¿Qué puede decir de* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$ *si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$*?*

Lema 6. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$*, entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Recordamos que $|\,|b| - |c|\,| \leq |b - c|$ para cualesquiera $b, c \in \mathbb{R}$. Por la hipótesis existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ entonces $|a_n - \ell|$. Basta tomar $N = N_0$. Así, si $n \geq N$, entonces

$$|\,|a_n| - |\ell|\,| \leq |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$. ■

Observación 7. El recíproco del Lema anterior es FALSO.

Demostración. Consideremos la sucesión $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$. Notamos que $|a_n| = |(-1)^n| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo cual $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$. Sin embargo, $\{a_n\}$ no es convergente. ■

Lema 8 (de comparación)**.** *Suponga que para toda $n \in \mathbb{N}$ (salvo una cantidad finita de términos) se cumple que $a_n \leq b_n$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.*

Demostración. Sea $M > 0$. Por hipótesis existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$, entonces $a_n > M$, y como $b_n \geq a_n$, entonces $b_n > M$. Así, por definición, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. ■

Lema 9 (de comparación)**.** *Suponga que para toda $n \in \mathbb{N}$ (salvo una cantidad finita de términos) se cumple que $a_n \leq b_n$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

Para concluir, calculemos algunos límites de sucesiones donde se use nuestro conocimiento acerca de funciones.

Ejercicio 10. *(i). Pruebe que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

(ii). Considere la sucesión definida por

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - ln(n).$$

¿Es $\{a_n\}$ convergente?

Demostración. (i) Sea $P = \{n, n+1\}$ la partición trivial del intervalo $[n, n+1]$. Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces

$$\underline{S}(f,P) < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx < \overline{S}(f,P)$$

y las desigualdades son estrictas porque una partición con 3 puntos da una suma inferior que es estrictamente mayor que $\underline{S}(f,P)$ y una suma superior que es menor estrictamente que $\overline{S}(f,P)$. Como $\underline{S}(f,P) = \frac{1}{n+1}$, $\overline{S}(f,P) = \frac{1}{n}$ y $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1) - \ln(n)$, entonces

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

(ii) Notamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $a_n - a_{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} > 0$ por el inciso anterior. Esto muestra que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

Ahora, notemos que para toda $j \in \mathbb{N}$ se cumple que $\ln(j+1) - \ln(j) < \frac{1}{j}$ por el inciso anterior, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} &> \sum_{j=1}^{n} (\ln(j+1) - \ln(j)) \\
&\geq \sum_{j=1}^{n-1} (\ln(j+1) - \ln(j)) \\
&= \ln(n) - \ln(1)
\end{aligned}$$

$$= \ln(n),$$

por lo tanto, $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln(n) > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\{a_n\}$ es acotada inferiormente (por 0). Finalmente, como $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces $\{a_n\}$ es convergente. Se denota $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$ y a dicho número se le llama *constante de Euler* y es un número tan misterioso que se conocen muy pocas propiedades. ∎

Ejercicio 11. *Calcule el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n}.$$

Demostración. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n} = \frac{e^{1/n}}{n} + \frac{e^{2/n}}{n} + \cdots + \frac{e^{n/n}}{n}.$$

Ahora, sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$. Consideremos la partición homogénea de $[0,1]$ en n subintervalos, es decir, tomemos $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1\}$. Luego, tenemos que

$$\overline{S}(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{i/n}}{n}$$

porque f es una función creciente (y por ello $M_i = e^{i/n}$), esto es,

$$\frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n} = \overline{S}(f, P_n).$$

Por lo tanto, queremos calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n).$$

Recordamos que en el caso de funciones integrables es posible calcular el valor de la integral como el límite de la sucesión de sumas superiores respecto a particiones homogéneas (vea la **Ayudantía 2**), y ya que además

$$\int_0^1 f = \int_0^1 e^x \, dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1,$$

obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) = \int_0^1 f = e - 1.$$

∎