Ayudantía 28
Cálculo de algunas series

Ejercicio 1. *Determine si la serie* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ *es convergente.*

Solución. Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ se cumple que $n^2 - 1 < n^2$, por lo cual $0 < \sqrt{n^2 - 1} < \sqrt{n^2} = n$, lo que implica que

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Observe que lo anterior justifica que la suma inicia en $n = 2$, pues ello asegura que la sucesión subyacente esté bien definida (si $n = 1$, entonces $\sqrt{n^2 - 1} = \sqrt{1 - 1} = 0$). Así, note que una serie puede iniciar en cualquier número y no necesariamente en 1.

Ahora, como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no es convergente, entonces la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ tampoco es convergente. Finalmente, por el criterio de comparación (ver **Teorema 5** de la **Clase 40**) obtenemos que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ no es convergente. ■

Ejercicio 2. *Determine si la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ *es convergente.*

Solución. Consideremos las sucesiones $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2}{n^3+1}\right\}$ y $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Notemos que $a_n,\ b_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3 + 1} = 1 > 0$$

Ya sabemos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge, así que por el criterio de comparación en el límite (ver **Teorema 7** de la **Clase 40**) se concluye que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ no es convergente. ■

Ejercicio 3. *Determine si la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ *es convergente.*

Solución. Consideremos la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2}{n!}\right\}$. Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2 n!}{n^2(n+1)!} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1$$

porque $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Ya que también

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

entonces se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n+1} = 1(0) = 0.$$

Ahora, como el límite anterior es cero, $0 < 1$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n > 0$, entonces por el criterio del cociente (ver **Teorema 9** de la **Clase 40**) se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ converge. ∎

Ejercicio 4. *Determine si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ *es convergente.*

Solución. Tomemos la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}\right\}_{n\geq 2}$. Note que la sucesión inicia en a_2 porque si $n = 1$, entonces $\ln(1) = 0$ y ello lleva a una condición Consideremos la función $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$. Notemos que para toda $x \in [2, \infty)$ se cumple que $f(x) > 0$ porque $x > 0$ y $\ln(x) > 0$. También, vemos que si $x, y \in [2, \infty)$ con $x < y$, entonces $\ln(x) < \ln(y)$, de donde $\sqrt{\ln(x)} < \sqrt{\ln(y)}$, por lo cual $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ y $\frac{1}{\sqrt{\ln(y)}} < \frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$, de donde obtenemos que

$$f(y) = \frac{1}{y\sqrt{\ln(y)}} < \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} = f(x),$$

es decir, f es decreciente. Además, $f(n) = a_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned} \int f(x)\ dx &= \int \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\ dx \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} \\ &= 2\sqrt{\ln(x)} \end{aligned}$$

donde usamos el cambio de variable $u = \sqrt{\ln(x)}$, de donde $du = \frac{1}{x}dx$. Esto implica que

$$\int_2^N f(x)\ dx = 2\sqrt{\ln(N)} - 2\sqrt{\ln(2)}$$

para toda $N \geq 2$, y por lo tanto $\lim_{N\to\infty} \int_2^N f(x)\ dx$ no existe, es decir, $\int_2^{\infty} f(x)\ dx$ no existe. Entonces, por el criterio de la integral (ver **Teorema 12** de la **Clase 40**) se concluye que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ no es convergente. ∎

Ejercicio 5. *Determine si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2}$ *es convergente.*

Solución. Notamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $|\operatorname{sen}(n\theta)| \leq 1$, por lo cual

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente (esto se demostró en el **Ejemplo 13** de la **Clase 40**), entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2}\right|$ es convergente por el criterio de comparación (ver **Teorema 5** de la **Clase 40**). Esto significa que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2}$ es absolutamente convergente. Es un teorema que una serie absolutamente convergente es convergente (ver **Teorema 18** de las **Notas 08**), lo cual implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2}$ es convergente. ∎