Última actualización: 19 de enero de 2022

Clase 35

En el capítulo anterior estudiamos los polinomios de Taylor, por ejemplo para la función exp vimos que

$$p_{n,\exp,0}(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Y utilizando el Teorema de Taylor vimos, también para la función exp, que existe $t \in (0, x)$ tal que

$$R_{n,\exp,0}(x) = \frac{e^t}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

En particular, si hacemos $x = 1$, tenemos que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n,\exp,0}(1), \tag{1}$$

donde $0 < R_{n,\exp,0}(1) \leq \dfrac{4}{(n+1)!}$ (esto último lo vimos en la Clase 34).
Note además que si $m > n$, entonces

$$0 < R_{m,\exp,0}(1) \leq \frac{4}{(m+1)!} < \frac{4}{(n+1)!},$$

esto es, conforme aumentemos el grado del polinomio de Taylor el resto será cada vez más pequeño y esto significa que mientras mayor sea el grado del polinomio de Taylor, evaluado en 1, "más se parecera a e". Esto motiva las siguientes preguntas: ¿Qué tanto podemos aumentar el grado del polinomio de Taylor? o de manera equivalente ¿Qué tantos términos podemos sumar? ¿Podemos sumar una *infinidad* de números?

Antes de responder estas preguntas es necesario repasar (estudiar, si no han visto el tema) el concepto de **sucesiones**.

Sucesiones

Definición 1 *Una sucesión es una función que tiene como dominio al conjunto de los números naturales.*

Notación: Si $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión, denotaremos por a_n a la imagen de $n \in \mathbb{N}$ bajo a, es decir,

$$a_n = a(n)$$

y a la sucesión a la denotaremos por $\{a_n\}$. Así, $\{n\}$, $\{(-1)^n\}$ y $\{1/n\}$ denotan a las sucesiones $a, b, c : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$a_n = n$$
$$b_n = (-1)^n$$
$$c_n = \frac{1}{n}$$

Cuyos primeros cinco terminos son

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5;$$

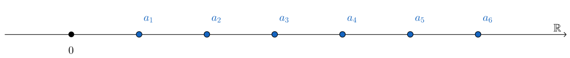
$$-1, 1, -1, 1, -1$$

y

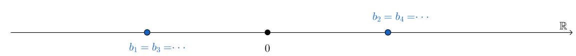
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5},$$

respectivamente.

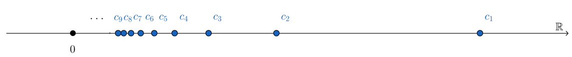
Como funciones que son, las sucesiones se pueden graficar en el plano cartesiano, pero resultará de mayor utilidad graficar solo las imágenes, vea figura 1.



(a) Gráfica de la sucesión $\{a_n\} = \{n\}$.



(b) Gráfica de la sucesión $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$.



(c) Gráfica de la sucesión $\{c_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

Figura 1

Las gráficas de la figura 1 nos hacer pensar que la sucesión $\{a_n\}$ "se va hacia infinito", que la sucesión $\{b_n\}$ "da saltos entre -1 y 1" y que la sucesión $\{c_n\}$ "se va hacia cero".

Definición 2 *Sean $\{a_n\}$ una sucesión y $l \in \mathbb{R}$. Diremos que $\{a_n\}$ converge a l, denotado por $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ o por $a_n \longrightarrow l$, si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todos los números naturales $n \geq N$ se tiene que*

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

Observación 3 *En la definición anterior:*

(1) El número $N \in \mathbb{N}$ depende del número ε, formalmente deberíamos escribir $N(\varepsilon)$, pero para no hacer pesada la notación solo escribiremos N.

(2) Recuerde que la desigualdad $|a_n - l| < \varepsilon$ es equivalente a que $a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Así, $\{a_n\}$ converge a l si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de tal manera que $a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, para todo $n \geq N$.

Ejemplo 4 *Demuestre que la sucesión $\{1/n\}$ converge a cero.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Debemos hallar un número $N \in \mathbb{N}$, de tal manera que para todo número natural $n \geq N$ se cumpla que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Por el Teorema 15 (Propiedad arquimediana) de Preliminares 01, sabemos que, para el $\varepsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Ahora, si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \geq \mathbb{N}$, entonces $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$. Así, para todo número natural $n \geq N$, se tiene que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

■

Ejemplo 5 *Muestre que para cualquier $l \in \mathbb{R}$ la sucesión $\{(-1)^n\}$ no converge a l.*

Demostración. Analizaremos tres casos, cuando $l > 0$, cuando $l = 0$ y cuando $l < 0$.

Si $l > 0$, consideremos $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Así, para cualquier $N \in \mathbb{N}$, si consideramos cualquier natural impar $n \geq N$, se tiene que

$$(-1)^n = -1 \notin \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2} \right) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon),$$

Por lo que $\{(-1)^n\}$ no converge a l.

Ahora, si $l = 0$, basta considerar $\varepsilon = 1/2$, pues en este caso

$$(-1)^n \notin \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right) = (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon),$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, si $l = 0$, $\{(-1)^n\}$ no converge a l.

Finalmente, si $l < 0$, consideremos $\varepsilon = \frac{-l}{2}$. Luego, para cualquier natural N podemos elegir un número natural par $n \geq N$ y se tiene que

$$1 = (-1)^n \notin \left(\frac{3l}{2}, \frac{l}{2} \right) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$

Por lo que, si $l < 0$, $\{(-1)^n\}$ no converge a l.

En cualquier caso, $\{(-1)^n\}$ no converge a l. ■

Antes de continuar es necesario precisar el lenguaje que ocuparemos en este capítulo: Diremos que una sucesión $\{a_n\}$ **converge** si existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. En este caso, diremos que l es el **límite de la sucesión** $\{a_n\}$ y en cualquier otro caso, diremos que la sucesión $\{a_n\}$ **diverge**. Por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ converge y su límite es 0 mientras que la sucesión $\{(-1)^n\}$ diverge.

Consideremos la siguiente "frase": *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que .....* Si esta "frase" es una hipótesis, entonces podemos elegir el épsilon que queramos y automáticamente podemos asumir la existencia de un $N \in \mathbb{N}$ tal que.... Por otro lado, si esta "frase" es algo que debemos demostrar entonces debemos ver que para un épsilon positivo cualquiera existe $N \in \mathbb{N}$ tal que... En la demostración del siguiente lema pueden poner en práctica esto.

Lema 6 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se tiene que $a = b$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que $|a - b| < \varepsilon$.*

Teorema 7 (El límite de una sucesión es único) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = m,$$

entonces $l = m$.

Demostración. Utilizaremos el Lema 6 para demostrar que $l = m$, es decir, mostraremos que para todo $\varepsilon > 0$ ocurre que $|l - m| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = m$, para el número positivo $\varepsilon/2$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

(I) para todo número natural $n \geq N_1$ se tiene que $|a_n - l| < \varepsilon/2$.

(II) para todo número natural $n \geq N_2$ se tiene que $|a_n - m| < \varepsilon/2$.

Entonces, si n es un número natural mayor que N_1 y mayor que N_2, se tiene que

$$|a_n - l| < \varepsilon/2 \qquad \text{y} \qquad |a_n - m| < \varepsilon/2.$$

Así, si $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que $N \in \mathbb{N}$ y para $n \geq N$ se cumple que

$$|l - m| = |l - a_n + a_n - m| \leq |l - a_n| + |a_n - m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Es decir, $|l - m| < \varepsilon$. ∎

Definición 8 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Diremos que $\{a_n\}$ es:*

*(1) una **sucesión acotada inferiormente** si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*(2) una **sucesión acotada superiormente** si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*(3) una **sucesión acotada** si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 9 *Toda sucesión convergente es acotada.*

Demostración. Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente, digamos a l, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Para el número positivo 1, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo número natural $n \geq N$ se tiene que $|a_n - l| < 1$. Ahora, como $|a_n| - |l| \leq |a_n - 1|$, se sigue que, para todo número natural $n \geq N$,

$$|a_n| < 1 + |l|.$$

Así, si $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |l|\}$, entonces

$$|a_n| \leq M,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $\{a_n\}$ es una sucesión acotada. ■

¿Vale el "regreso" de este lema? La respuesta es NO, por ejemplo, la sucesión $\{(-1)^n\}$ es una sucesión acotada (considere $M = 2$), pero ya vimos que esta sucesión diverge.