Última actualización: 20 de enero de 2022

Clase 36

La sesión anterior vimos lo siguiente:

Definición 1 *Una sucesión es una función que tiene como dominio al conjunto de los números naturales.*

Notación: Si $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión, denotaremos por a_n a la imagen de $n \in \mathbb{N}$ bajo a, es decir,

$$a_n = a(n)$$

y a la sucesión a la denotaremos por $\{a_n\}$.

Definición 2 *Sean $\{a_n\}$ una sucesión y $l \in \mathbb{R}$. Diremos que $\{a_n\}$ converge a l, denotado por $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ o por $a_n \longrightarrow l$, si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todos los números naturales $n \geq N$ se tiene que*

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

Lema 3 *Toda sucesión convergente es acotada.*

Aritmética de los límites de sucesiones

Teorema 4 (Aritmética de los límites de sucesiones) *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones y $l, m \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = m$. Se tiene que:*

(a) La sucesión $\{a_n + b_n\}$ converge, más aún,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = l + m.$$

(b) Para $k \in \mathbb{R}$, la sucesión $\{ka_n\}$ converge, de hecho,

$$\lim_{n\to\infty} ka_n = kl.$$

(c) La sucesión $\{a_n - b_n\}$ converge, más aún,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = l - m.$$

(d) La sucesión $\{a_n b_n\}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = lm.$$

(e) Si $m \neq 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_n \neq 0$ para todo $n \geq N$ y la sucesión $\{d_n\}$ definida como sigue

$$d_n = \begin{cases} 1 & \textit{si } n < N, \\ \dfrac{1}{b_n} & \textit{si } n \geq N, \end{cases}$$

es convergente. De hecho, $\lim_{n\to\infty} d_n = \dfrac{1}{m}$, pero esto se suele escribir como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{m}.$$

(f) Si $m \neq 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_n \neq 0$ para todo $n \geq N$ y la sucesión $\{d_n\}$ definida como sigue

$$d_n = \begin{cases} 1 & \textit{si } n < N, \\ \dfrac{a_n}{b_n} & \textit{si } n \geq N, \end{cases}$$

es convergente. De hecho, $\lim_{n\to\infty} d_n = \dfrac{l}{m}$, pero esto se suele escribir como sigue

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$.

(a) Para el número positivo $\varepsilon/2$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

  (I) para todo número natural $n \geq N_1$ se tiene que $|a_n - l| < \varepsilon/2$.
  (II) para todo número natural $n \geq N_2$ se tiene que $|a_n - m| < \varepsilon/2$.

Así, si $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que $N \in \mathbb{N}$ y para $n \geq N$ se cumple que

$$|(a_n + b_n) - (l + m)| = |(a_n - l) + (b_n - m)| \leq |a_n - l| + |b_n - m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(b) Si $k = 0$, el resultado se sigue trivialmente (¿por qué?). Supongamos entonces que $k \neq 0$. Para el número positivo $\varepsilon/|k|$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo número natural $n \geq N$ se tiene que $|a_n - l| < \varepsilon/|k|$. Así, si $n \geq N$, se tiene que

$$|ka_n - kl| = |k||a_n - l| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon.$$

(c) El resultado se sigue de los incisos (a) y (b).

(d) Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n b_n - lm| = |a_n b_n - b_n l + b_n l - lm| \leq |b_n||a_n - l| + |b_n - m||l|. \tag{1}$$

y

$$|a_n b_n - lm| = |a_n b_n - a_n m + a_n m - lm| \leq |a_n||b_n - m| + |a_n - l||m| \tag{2}$$

Así, si $l = 0$, o $m = 0$, usando el Lema 3 y la convergencia de $\{a_n\}$ en (1), o el Lema 3 y la convergencia de $\{b_n\}$ en (2), podemos conluir (¿cómo?) lo deseado.

Supongamos entonces que $l, m \neq 0$. Como $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, por el Lema 3, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, para los números positivos $\varepsilon/(2|m|)$ y $\varepsilon/(2M)$, existen números naturales N_1 y N_2, respectivamente, tales que :

(I) para todo número natural $n \geq N_1$ se tiene que $|a_n - l| < \varepsilon/(2|m|)$.

(II) para todo número natural $n \geq N_2$ se tiene que $|b_n - m| < \varepsilon/(2M)$.

Por lo que, si $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que $N \in \mathbb{N}$ y para $n \geq N$ que

$$|a_n b_n - lm| \leq |a_n||b_n - m| + |a_n - l||m| < M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2|m|}\right)|m| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(e) Para los números positivos $\dfrac{|m|}{2}$ y $\dfrac{\varepsilon|m|^2}{2}$, existen números naturales N_1 y N_2, respectivamente, tales que:

(I) para todo número natural $n \geq N_1$ se tiene que $|b_n - m| < \dfrac{|m|}{2}$.

(II) para todo número natural $n \geq N_2$ se tiene que $|b_n - m| < \dfrac{\varepsilon|m|^2}{2}$.

De (eI), se tiene que $|m| - |b_n| < |m|/2$, para todo $n \geq N_1$ y de aquí que

$$0 < \frac{|m|}{2} < |b_n|,$$

para todo $n \geq N_1$. De donde $b_n \neq 0$, para todo $n \geq N_1$. Note también que

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|m|}, \tag{3}$$

para todo $n \geq N_1$.

Así, si $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que $N \in \mathbb{N}$ y para $n \geq N$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{m}\right| &= \left|\frac{b_n - m}{b_n m}\right| && (4)\\
&= \frac{|b_n - m|}{|b_n||m|} && (5)\\
&< \frac{\varepsilon|m|^2}{2|b_n||m|} && (6)\\
&= \frac{\varepsilon|m|}{2|b_n|} && (7)\\
&< \frac{2\varepsilon|m|}{2|m|} && (8)\\
&= \varepsilon, && (9)
\end{aligned}$$

donde (6) se da por (eII) y (8) se da por (3).

(f) Se sigue de los incisos (d) y (e).

■

Lema 5 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Si $a_n \geq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, entonces $l \geq 0$.*

Demostración. Supongamos que $a_n \geq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, pero que $l < 0$. Como $\{a_n\}$ converge a l, para el número positivo $-l$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq N$,

$$|a_n - l| < -l.$$

Así, tenemos que $l < a_n - l < -l$, para toda $n \geq N$, y de aquí que

$$a_n < 0,$$

para toda $n \geq N$. Lo que es una contradicción al hecho de que $a_n \geq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Concluimos entonces que $l \geq 0$. ∎

Corolario 6 *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones. Si $a_n \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = m$, entonces $l \leq m$.*

Demostración. Consideremos la sucesión $\{b_n - a_n\}$. Se tiene que $b_n - a_n \geq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, pues $a_n \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora, usando que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convengen a l y m, respectivamente, y el inciso (c) del Teorema 4, se tiene que la sucesión $\{b_n - a_n\}$ converge y

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = m - l.$$

Luego, por el lema anterior, se tiene que $m - l \geq 0$, de donde $m \geq l$. ∎