*Última actualización: 24 de enero de 2022*

# Clase 37

En la clase anterior enunciamos y demostramos el Teorema sobre la *Aritmética de los límites de sucesiones*, además de los siguientes resultados:

**Lema 1** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Si $a_n \geq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, entonces $l \geq 0$.*

**Corolario 2** *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones. Si $a_n \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = m$, entonces $l \leq m$.*

## Teorema del Sándwich y un Criterio de Convergencia

En la demostración del siguiente resultado será tentador usar el Corolario 2, pero debemos tener cuidado, pues para usar dicho corolario es necesario tener como hipótesis la convergencia de todas las sucesiones involucradas.

**Teorema 3 (del Sándwich)** *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tres sucesiones tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{n\to} a_n = l = \lim_{n\to\infty} c_n$, entonces la sucesión $\{b_n\}$ converge a $l$, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = l.$$

**Demostración.** Sea $\varepsilon > 0$. Como $a_n \leq b_n \leq c_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$|b_n - a_n| \leq |c_n - a_n|, \tag{1}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $\lim_{n\to\infty} a_n = l = \lim_{n\to\infty} c_n$, para el número positivo $\varepsilon/3$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

(I) $|a_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, para toda $n \geq N_1$.

(II) $|c_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, para toda $n \geq N_2$.

Así, si $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, se tiene, para $n \geq N$, que

$$\begin{aligned}
|b_n - l| &= |b_n - a_n + a_n - l| && (2)\\
&\leq |b_n - a_n| + |a_n - l| && (3)\\
&\leq |c_n - a_n| + |a_n - l| && (4)\\
&= |c_n - l + l - a_n| + |a_n - l| && (5)\\
&\leq |c_n - l| + |l - a_n| + |a_n - l| && (6)\\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} && (7)\\
&= \varepsilon, && (8)
\end{aligned}$$

donde las desigualdades en (3) y (6) se siguen de la desigualdad del triángulo; la desigualdad en (4) se tiene por (1) y la desigualdad en (7) se obtiene por (I) y (II). Por lo tanto, $\{b_n\}$ converge a $l$. ■

El siguiente diagrama ayuda a recordar el Teorema del Sándwich.

$$\begin{array}{cccccc} & a_n & \leq & b_n & \leq & c_n \\ {\scriptstyle n\to\infty} & \big\downarrow & & \Bigg\downarrow & & \big\downarrow \\ & l & & & & l \\ & & & l & & \end{array}$$

**Definición 4** *Sean $a \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Un número real $x$ es llamado raíz n-ésima de $a$ si*

$$x^n = a.$$

*Denotamos por $\sqrt[n]{a}$ a la raíz n-ésima positiva de $a$.*

**Ejemplo 5** *Sea $a > 1$. Muestre que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{a}\right\}$ converge.*

**Demostración.** Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\sqrt[n]{a} > 1$ (¿por qué?). Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un número $h_n > 0$ tal que

$$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n. \tag{9}$$

Observe que de esta manera obtenemos una sucesión $\{h_n\}$. Ahora, por la desigualdad de Bernoulli y la igualdad (9), tenemos para cada $n \in \mathbb{N}$ que

$$a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n,$$

de donde,

$$\frac{a-1}{n} \geq h_n, \tag{10}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que tenemos tres sucesiones, $\{0\}$, $\{h_n\}$ y $\left\{\frac{a-1}{n}\right\}$, que, por (10), cumplen

$$0 \leq h_n \leq \frac{a-1}{n},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Más aún, las sucesiones $\{0\}$ y $\left\{\frac{a-1}{n}\right\}$ convergen a cero. Así, por el Teorema del Sándwich, se tiene que la sucesión $\{h_n\}$ converge a cero.

Finalmente, de la igualdad (9), se sigue que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{a}\right\}$ converge y que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1 + h_n) = 1.$$

■

Note que hasta ahora hemos estudiado resultados que son consecuencia del hecho de que algunas sucesiones sean convergentes. a continuación, comenzaremos a estudiar resultados que nos permitan decidir cuándo una sucesión es convergente sin ocupar, o comparar con, otras sucesiones.

**Definición 6** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Diremos que $\{a_n\}$ es una sucesión:*

*(1)* ***creciente*** *si $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*(2)* ***no decreciente*** *si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*(3)* ***decreciente*** *si $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*(4)* ***no creciente*** *si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

**Observación 7** *Note que:*

*(1) $\{a_n\}$ creciente $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ no decreciente.*

*(2) $\{a_n\}$ decreciente $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ no creciente.*

*Pero las implicaciones en la otra dirección no son verdaderas.*

**Ejemplo 8** *Dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Así, la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es un ejemplo de una sucesión decreciente.*

**Teorema 9** *Si $\{a_n\}$ es una sucesión no decreciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ converge.*

**Demostración.** Consideremos el conjunto $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene que $A$ es un conjunto no vacío y, por hipótesis, acotado superiormente, así que, por el Axioma del Supremo, existe $\alpha = \sup A$. Mostraremos que la sucesión $\{a_n\}$ converge a $\alpha$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 10 de Preliminares 01, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha - \varepsilon < a_N,$$

esto es,

$$\alpha - a_N < \varepsilon.$$

Ahora, como $\{a_n\}$ es no decreciente, para $n \geq N$, se tiene que $a_N \leq a_n$ y de aquí que $-a_n \leq -a_N$, para toda $n \geq N$. Se sigue que

$$\alpha - a_n \leq \alpha - a_N < \varepsilon,$$

para toda $n \geq N$. Finalmente, como $\alpha$ es cota superior de $A$, tenemos que $a_n \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde, $\alpha - a_n = |\alpha - a_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$|\alpha - a_n| < \varepsilon,$$

para toda $n \geq N$, es decir, $\{a_n\}$ converge a $\alpha$. ■

Finalmente, enunciamos un corolario al Teorema 9.

**Corolario 10** *Si $\{a_n\}$ es una sucesión no creciente y acotada inferiormente, entonces $\{a_n\}$ converge.*