Última actualización: 26 de enero de 2022

Clase 38

La sesión anterior demostramos el siguiente criterio de convergencia:

Teorema 1 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión no decreciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ converge.*

Y enunciamos un corolario de este:

Corolario 2 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión no creciente y acotada inferiormente, entonces $\{a_n\}$ converge.*

En esta sesión continuaremos estudiando los criterios de convergencia de sucesiones y para ello es necesario introducir dos conceptos, el de subsucesión y el de sucesión de Cauchy.

Más Criterios de Convergencia

Definición 3 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Decimos que $\{a_{n_k}\}$ es una* ***subsucesión*** *de $\{a_n\}$ si existe una función $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ creciente tal que $a \circ g(k) = a_{n_k}$.*

Observación 4 *Una subsucesión de una sucesión es una sucesión en sí misma pues sigue siendo una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 5 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión, entonces $\{a_n\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$ porque la función identidad $id : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es estrictamente creciente.*

Ejemplo 6 *La sucesión $\{(-1)^n\}$ tiene como subsucesión a $\{(-1)^{2k}\} = \{1\}$, basta considerar la función $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(k) = 2k$.*

Ejemplo 7 *La sucesión $\{a_n\}$ tiene como subsucesión a $\{a_{n+1}\}$, en este caso, consideramos $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(n) = n + 1$.*

Lema 8 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión, entonces existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ que es o bien no decreciente o bien no creciente.*

Demostración. Llamaremos *punto cumbre* de la sucesión $\{a_n\}$ a un número natural n tal que $a_n > a_m$ para toda $m > n$, vea figura 1.

Analizaremos los dos posibles casos, $\{a_n\}$ tiene una infinidad de puntos cumbre o $\{a_n\}$ tiene un número finito de puntos cumbre.

Supongamos, primero, que $\{a_n\}$ tiene una infinidad de puntos cumbre, digamos

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots \tag{1}$$

Ahora, por definición de punto cumbre, tenemos que

$$a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \cdots > a_{n_k} > \cdots \tag{2}$$

De (1) se sigue que la función $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(k) = n_k$ es creciente y por lo tanto $a \circ g(k) = a_{n_k}$, es decir, $\{a_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$. Además, por (2), tenemos que $\{a_{n_k}\}$ es decreciente, por lo que, en este caso, es la subsucesión deseada.

Supongamos ahora que $\{a_n\}$ tiene un número finito de puntos cumbre y que M es el mayor de ellos. Consideremos $n_1 > M$. Como n_1 NO es punto cumbre, entonces existe $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \geq a_{n_1}$. Recursivamente construimos $\{n_k\}$ con $n_{k+1} > n_k$ tal que $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$. Así, al definir $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(k) = n_k$ obtenemos que g es creciente y $a \circ g(k) = a_{n_k}$, es decir, $\{a_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$ tal que $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$ (es no decreciente). ■

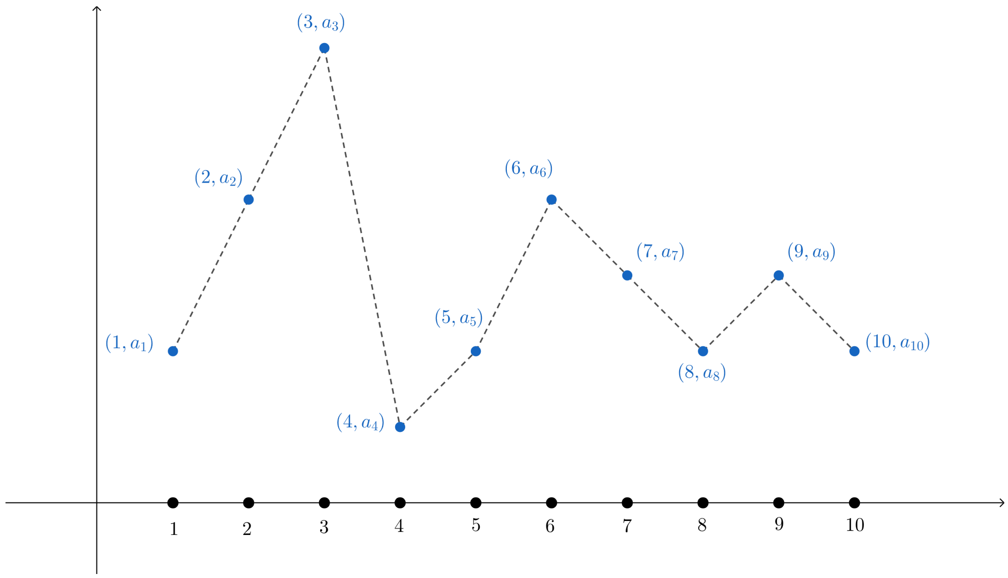

Figura 1: 3 y 6 son puntos cumbre.Note que aquí estamos pensando en la gráfica de $\{a_n\}$ como un subconjunto del plano.

Corolario 9 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada. Por el Lema 8, existe $\{a_{n_k}\}$ una subsucesión no decreciente (o bien no creciente) de $\{a_n\}$. Como $\{a_{n_k}\}$ es una sucesión acotada (¿por qué?), entonces por el Teorema 1 (o bien el Corolario 2), se sigue que $\{a_{n_k}\}$ es convergente. ■

A continuación, introduciremos un concepto que nos permitirá dar otro criterio de convergencia.

Definición 10 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Diremos que $\{a_n\}$ es una* ***sucesión de Cauchy*** *si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \in \mathbb{N}$ cumplen que $m, n \geq N$, entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*
Lo anterior suele escribirse como

$$\lim_{n,m\to\infty} |a_n - a_m| = 0.$$

Lema 11 *Si $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{a_n\}$ es acotada.*

Demostración. Como $\{a_n\}$ es de Cauchy, para el número positivo 1, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces $|a_n - a_m| < 1$. En particular, si $n \geq N$ se cumple que $|a_n - a_N| < 1$, de donde

$$|a_n| < 1 + |a_N|$$

para toda $n \geq N$. Así, si $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$, entonces

$$|a_n| \leq M,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $\{a_n\}$ es una sucesión acotada. ■

Lema 12 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy. Si $\{a_{n_k}\}$ es una subsucesión convergente de $\{a_n\}$, entonces $\{a_n\}$ también es convergente.*

Demostración. Supongamos que $\{a_{n_k}\}$ converge a alguna $l \in \mathbb{R}$. Veamos que $\{a_n\}$ también converge a l.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{a_{n_k}\}$ converge a l, para el número positivo $\varepsilon/2$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_k \geq N_1$, entonces

$$|a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, como $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m, n \geq N_2$ se cumple que

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, si $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene, para $n \geq N$, que

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{n_N}| + |a_{n_N} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donde el resultado se obtiene porque $n_N \geq N$ pues la función que permite definir la subsucesión es estrictamente creciente, así que $n_N \geq N_1$ y por ello $|a_n - a_{n_N}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Por lo tanto, $\{a_n\}$ converge a l. ■

Teorema 13 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Se cumple que $\{a_n\}$ es convergente si y sólo si $\{a_n\}$ es de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión convergente y que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = \ell$ para alguna $\ell \in \mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Luego, si $m, n \geq N$ se cumple que

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |\ell - a_m| = |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Recíprocamente, supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Por el Lema 11, $\{a_n\}$ es una sucesión acotada. Luego, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (Corolario 9), existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$ que es convergente. Finalmente, por el Lema 12 obtenemos que $\{a_n\}$ es una sucesión convergente. ■

¿Recuerda qué significa $\lim\limits_{x\to c} f(x)$? Una manera muy *informal* de interpretar esto, es pensar que nos acercamos a c con elementos x en el dominio de f distintos de c (tanto por la izquierda como por la derecha) y al mismo tiempo vemos qué ocurre con las imágenes de estos elementos, es ddecir, qué ocurre con $f(x)$. Con esta idea podríamos pensar en acercarnos a c con una sucesión, es decir, si tenemos una sucesión que converge a c, donde ningún elemento es c, y esta sucesión está contenida en el dominio de nuestra función, podríamos preguntarnos por la sucesión de imágenes, bajo la función, de los elementos de dicha sucesión, ¿no?

Teorema 14 *Sean $l \in \mathbb{R}$, $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in (a, b)$. Se tiene que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$ si y sólo si para cualquier sucesión $\{a_n\}$ que cumple:*

(a) $a_n \in (a, b)$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$;

(b) $a_n \neq c$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$.

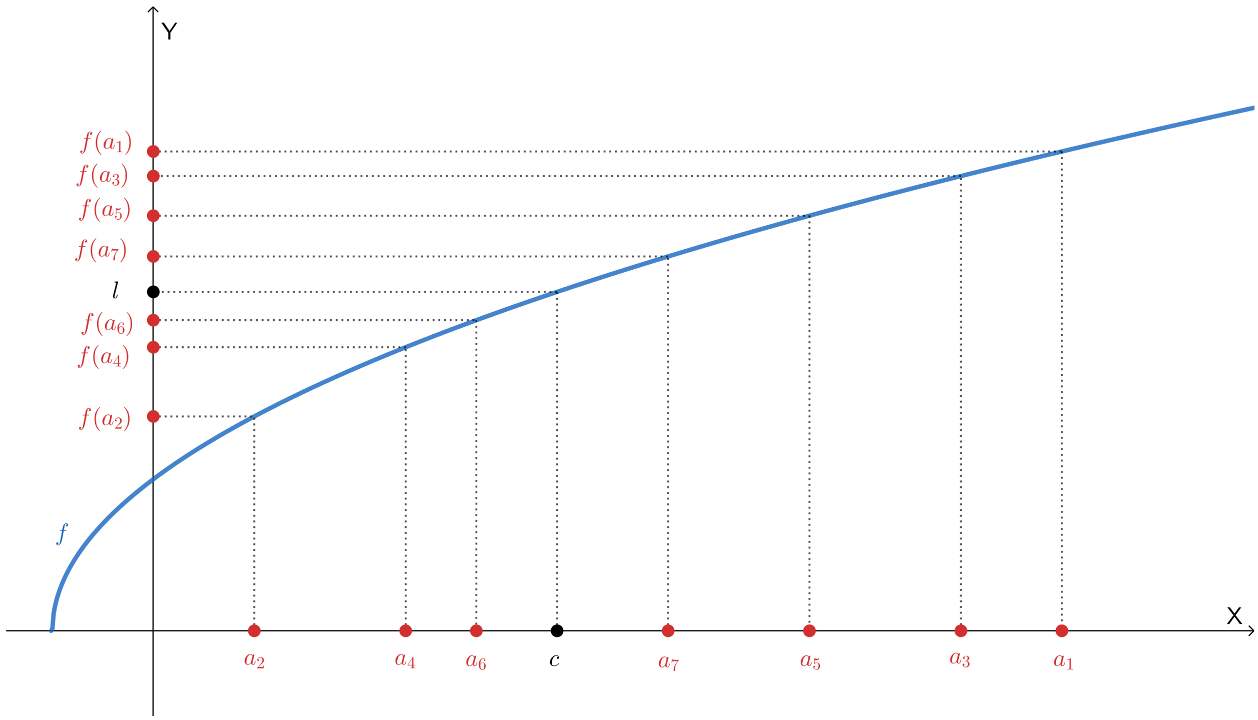

Figura 2: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$ si y sólo si para cualquier sucesión $\{a_n\}$ contenida en el dominio de f, cuyos elementos son distintos de c y tal que converge a c, se tiene que la sucesión $\{f(a_n)\}$.

Demostración. $\Longrightarrow$] Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$ y sea $\{a_n\}$ una sucesión que cumple los incisos (a), (b) y (c). Como $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in (a, b)$ que cumple que $0 < |x - c| < \delta$ se tiene que

$$|f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3}$$

Ahora, por el inciso (c), para el número positivo δ, existe $N \in \mathbb{N}$ de tal manera que, si $n \geq N$, entonces $|a_n - c| < \delta$. Luego, del inciso (b), se sigue que, si $n \geq N$, entonces $0 < |a_n - c| < \delta$ y, por (3) y (a), se obtiene que

$$|f(a_n) - l| < \varepsilon.$$

Es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$.

$\Longleftarrow$] Demostraremos esta implicación por contrapositiva. Supongamos entonces que $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq l$, esto es, existe $\varepsilon_0 > 0$ de tal manera que para cualquier $\delta > 0$ existe $x \in (a, b)$ que cumple que $0 < |x - c| < \delta$, pero $|f(x) - l| \geq \varepsilon_0$. Como lo anterior vale para cualquier $\delta > 0$, tenemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, que existe $x_n \in (a, b)$ que cumple que $0 < |x_n - c| < \dfrac{1}{n}$, pero $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$.
Note que de esta manera obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ que cumple los incisos (a), (b) y (c) (¿por qué?), pero $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq l$, pues $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, con lo que concluimos nuestra demostración. ■

La forma de aplicar el Teorema 14 no es directa, pues no es fácil verificar que cada sucesión $\{a_n\}$ que cumple los incisos (a), (b) y (c) también cumple que $\{f(a_n)\}$ coverge a l. La forma más común de aplicar dicho teorema es para mostrar que no existe el límite de una función f en un punto c, pues basta exhibir una sucesión $\{a_n\}$ que cumple los incisos (a), (b) y (c), pero que la sucesión $\{f(a_n)\}$ no converge o bien exhibir dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que satisfacen los inicisos (a), (b) y (c), pero que las sucesiones $\{f(a_n)\}$ y $\{f(b_n)\}$ convergen a dos números distintos.

Ejemplo 15 *Muestre que* $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ *no existe.*

Solución. Note que el dominio de la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es el conjunto $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ahora, consideremos las sucesiones $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2n\pi}\right\}$ y $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right\}$. Se tiene que $a_n, b_n \in A$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $a_n, b_n \neq 0$. También tenemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (¿puede argumentar estas afirmaciones?). Es decir, las sucesiones $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ cumplen los incisos (a), (b) y (c) del enunciado del Teorema 14.

Así, si $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = l$, para algún $l \in \mathbb{R}$, por el Teorema 14, debería suceder que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = l. \tag{4}$$

Veamos si esto es cierto. Por un lado, tenemos que

$$f(a_n) = sen\left(\frac{1}{a_n}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \operatorname{sen}(2n\pi) = 0,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Ahora, por otro lado tenemos que

$$f(b_n) = sen\left(\frac{1}{b_n}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\pi/2}}\right) = \operatorname{sen}(2n\pi + \pi/2) = 1,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo que

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Como no ocurre (4), concluimos que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe. ■

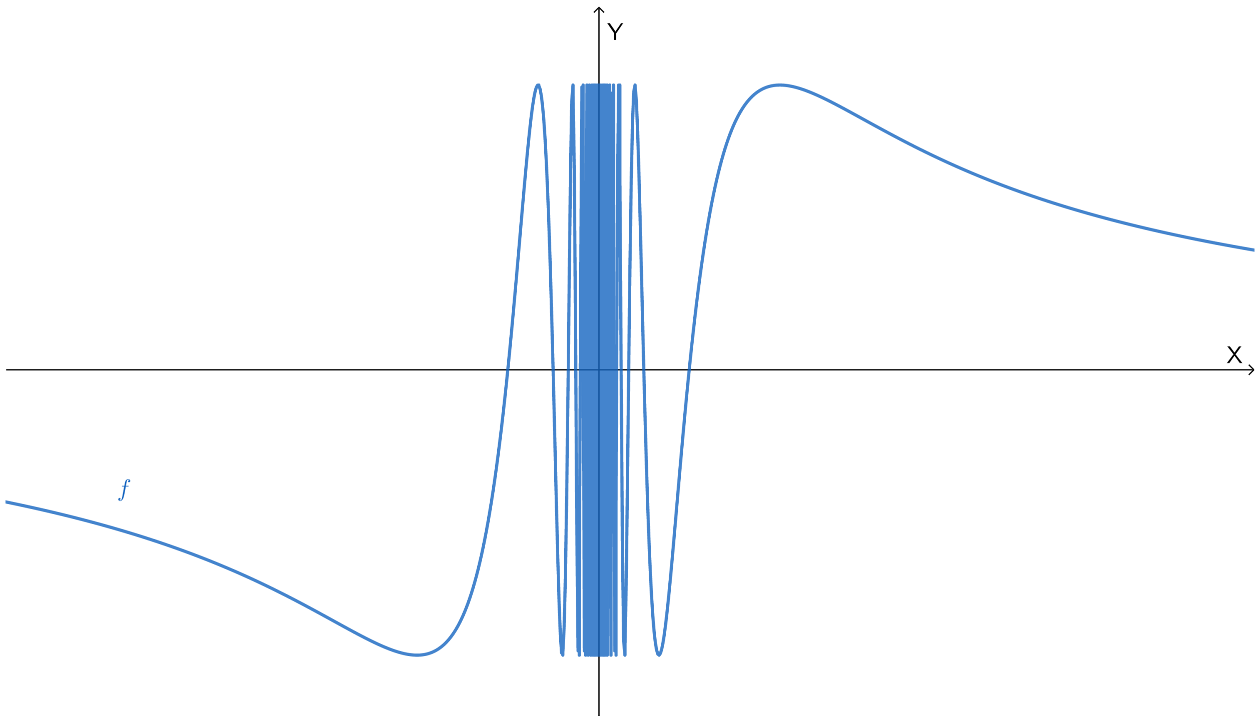

Figura 3: Se muestra la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.