Última actualización: 27 de enero de 2022

Clase 39

Al inicio de este capítulo recordamos, usando la teoría de polinomios de Taylor, que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n,\exp,0}(1), \tag{1}$$

donde $0 < R_{n,\exp,0}(1) \leq \dfrac{4}{(n+1)!}$.

Ahora, que ya sabemos sucesiones, notemos que las sucesiones $\{0\}$, $\{R_{n,\exp,0}(1)\}$ y $\left\{\dfrac{4}{(n+1)!}\right\}$, cumplen que

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{(n+1)!}$$

y

$$0 < R_{n,\exp,0}(1) \leq \frac{4}{(n+1)!}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que estas sucesiones cumplen las hipótesis del Teorema del Sándwich, así que

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,\exp,0}(1) = 0. \tag{2}$$

Entonces, de la identidad (1) y el límite (2), tenemos que

$$\begin{aligned}
e &= \lim_{n\to\infty} e \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n,\exp,0}(1)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] + \lim_{n\to\infty} R_{n,\exp,0}(1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right],
\end{aligned}$$

claro, suponiendo que $\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right]$ existe.

Y sí, cómo seguramente lo espera,

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

una "suma infinita", justo el tema principal de estas notas.

Series

Definición 1 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Definimos* ***la sucesión de sumas parciales de*** *$\{a_n\}$ como la sucesión $\{s_n\} = \{a_1 + \cdots + a_n\}$. Diremos que la sucesión $\{a_n\}$ es* ***sumable*** *si la sucesión de sumas parciales converge, es decir, si existe*

$$\lim_{n\to\infty} s_n.$$

En este caso, denotamos a dicho límite por el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Aunque en la definición anterior hemos formalizado lo que significa sumar los términos de una sucesión, no es la terminología que más se usa, de hecho, en vez de decir que la sucesión $\{a_n\}$ es sumable diremos que **la serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** y en cualquier otro caso que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge. Por supuesto debe notar que esto no es del todo formal, pues $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es un número si la sucesión $\{a_n\}$ es sumable, así que no tiene mucho sentido que digamos que "un número converge", pero nos permitiremos esta terminología menos precisa.

Note también que hemos definido la convergencia de una serie (es decir, que una sucesión sea sumable) en términos de la convergencia de una sucesión, por esta razón es posible "reescribir" resultados acerca de las sucesiones en términos de series.

Proposición 2 *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen y $c \in \mathbb{R}$. Entonces*

(1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$ converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Como mencionamos antes, esta proposición es consecuencia inmediata de *la aritmética de límites de sucesiones.*

Continuaremos con un lema que caracteriza la convergencia de una serie y aunque en la práctica es poco útil, tiene como consecuencia una condicicón necesaria para la convergencia de una serie.

Lema 3 (Criterio de Cauchy) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si*

$$\lim_{n,m\to\infty} [a_{n+1} + \cdots + a_m] = 0.$$

Demostración. Se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la sucesión $\{s_n\} = \{a_1 + \cdots + a_n\}$ converge. Y lo anterior, por el Teorema 13 de la Clase 38, ocurre si y sólo si la sucesión $\{s_n\}$ es de Cauchy, lo cual ocurre si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m > n \geq N$ se tiene que

$$|s_m - s_n| < \varepsilon.$$

Esto es, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m > n \geq N$ se tiene que

$$|a_{n+1} + \cdots + a_n| = |(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m) - (a_1 + \cdots + a_n)| = |s_m - s_n| < \varepsilon.$$

O de manera equivalente

$$\lim_{n,m\to\infty} [a_{n+1} + \cdots + a_m] = 0.$$

■

Teorema 4 (Condición del Resto) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Demostración. Se sigue del Lema anterior con $m = n + 1$ y usando la definición de convergencia de una sucesión. ■

Una pregunta natural es si vale el regreso de este teorema, es decir, si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ¿entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge? La respuesta la proporciona el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 *Indique si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ converge o no.*

Solución. Sea $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales de $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. Note que dicha sucesión es creciente pues $\frac{1}{n} > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, además

$$\begin{aligned} s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} \\ s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} \geq 2\left(\frac{1}{2}\right) \\ s_{16} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{16} \geq 3\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Se puede demostrar (intente hacerlo) que en general

$$s_{2^{k+1}} \geq k\left(\frac{1}{2}\right).$$

Se sigue que $\{s_n\}$ no es acotada superiormente y de aquí que no existe $\lim_{n\to\infty} s_n$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge. ■

Es usual utilizar la versión contrapositiva del Teorema 4 para demostrar que una serie no converge, esto lo veremos en el siguiente ejemplo. Pero, también usaremos un ejercicio de la tarea correspondiente a sucesiones:
Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| < 1$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Ejemplo 6 (La serie geométrica) *Sea $r \in \mathbb{R}$. Indique si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge o no.*

Solución. Note que si $|r| \geq 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n \neq 0$, por lo que, por el Teorema 4, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ no converge.

Ahora, si $|r| < 1$, note que

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + r + r^2 + \cdots + r^n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Por lo tanto, si $|r| < 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge y

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}.$$

Note, por ejemplo que con $r = \dfrac{1}{2}$, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

y de aquí que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

$\blacksquare$