Última actualización: 28 de enero de 2022

Clase 40

La sesión anterior, entre otras cosas vimos lo siguiente:

Definición 1 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Definimos* ***la sucesión de sumas parciales de*** *$\{a_n\}$ como la sucesión $\{s_n\} = \{a_1 + \cdots + a_n\}$. Diremos que la sucesión $\{a_n\}$ es* ***sumable*** *si la sucesión de sumas parciales converge, es decir, si existe $\lim_{n\to\infty} s_n$. En este caso, denotamos a dicho límite por el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es decir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$.*

Teorema 2 (Condición del Resto) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Ejemplo 3 (La serie geométrica) *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$.*

.

En esta ocasión aprovecharemos nuestros conocimientos de sucesiones para obtener criterios de convergencia para series.

Algunos Criterios de Convergencia para Series

Proposición 4 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos no negativos, es decir, $a_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales de $\{a_n\}$ es acotada superiormente.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es convergente, luego es acotada, en particular, acotada superiormente.
$\Leftarrow]$ Note que la sucesión $\{s_n\}$ es no decreciente, pues $a_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, si $\{s_n\}$ es acotada superiormente, entonces, por el Teorema 9 de la Clase 37, tenemos que $\{s_n\}$ es convergente, es decir, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. ■

Teorema 5 (Criterio de comparación) *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que*

$$0 \leq a_n \leq b_n \tag{1}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración. Sean $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ las sucesiones de sumas parciales de $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ respectivamente. De la condición (1) se sigue que

$$0 \leq s_n \leq t_n \tag{2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, la sucesión $\{t_n\}$ converge, por lo que es acotada, luego acotada superiormente y de (2) se sigue que $\{s_n\}$ es acotada. Finalmente, por la Proposición 4, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■

Ejemplo 6 *Demuestre que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \cos(1 + n^3)}{2^n + \operatorname{sen}^2(1 - n^2)}$$

converge.

Solución.

Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$-1 \leq -\cos(1 + n^3) \leq 1,$$

de donde

$$1 \leq 2 - \cos(1 + n^3) \leq 3, \tag{3}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, como $\operatorname{sen}^2(1-n^2) \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $2^n + \operatorname{sen}^2(1-n^2) \geq 2^n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, así que

$$0 < \frac{1}{2^n + \operatorname{sen}^2(1 - n^2)} \leq \frac{1}{2^n}, \tag{4}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. De (3) y (4) se sigue que

$$0 \leq \frac{2 - \cos(1 + n^3)}{2^n + \operatorname{sen}^2(1 - n^2)} \leq \frac{3}{2^n}.$$

Pero además, por el Ejercicio 3 la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

converge y luego por el inciso (2) de la Proposición 2 de la Clase 39, tenemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$$

converge. Así, por el Teorema 5, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \cos(1 + n^3)}{2^n + \operatorname{sen}^2(1 - n^2)}$$

converge. ■

Continuamos con más criterios de convergencia para series.

Teorema 7 (Criterio de comparación en el límite) *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n, b_n > 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0.$$

Se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Como $a_n, b_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0.$$

Así, para $\varepsilon = c > 0$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq N$ se tiene que

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < c$$

y de aquí que

$$a_n < 2cb_n.$$

Ahora, como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces, por el Lema 3 de la Ayudantía 26, $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ converge. Luego, por el Teorema 5, tenemos que

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

converge. Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

y como la primer suma de la derecha es finita, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge.

Para la necesidad, basta repetir la demostración de la suficiencia, pero en este caso usando que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{c} > 0.$$

■

Ejemplo 8 *Indique si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ converge o no.*

Solución. Consideremos las sucesiones $\{a_n\} = \left\{ \frac{n+1}{n^2+1} \right\}$ y $\{b_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$. Note que $a_n,\ b_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+1} = 1 > 0.$$

Ahora, por el Ejemplo 5 de la Clase 39, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge, por lo que, usando el Teorema 7, conluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

no converge. ■

En el siguiente criterio usamos fuertemente la serie geométrica del Ejemplo 3.

Teorema 9 (Criterio del Cociente) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n > 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

Entonces:

(1) Si $r < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Si $r > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

(3) Si $r = 1$, no podemos afirmar nada acerca de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demostración.

(1) Si $r < 1$, consideremos $s \in (r, 1)$. Luego, para $\varepsilon = s - r > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < s - r.$$

Y de esta última desigualdad se sigue que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < s,$$

para toda $n \geq N$. Note que de lo anterior obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq s a_N \\ a_{N+2} &\leq s a_{N+1} \leq s^2 a_N \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\leq s^k a_N. \end{aligned}$$

Ahora, como $0 < s < 1$, entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty} s^k$ converge, pues es una serie geométrica. Luego, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_N s^k$ converge. Ahora, por el Teorema 5, tenemos que la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge, Finalmente, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

y la primer suma de la derecha es finita, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Ahora, si $r > 1$, consideremos $s \in (1, r)$. Así, para $\varepsilon = r - s > 0$ tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < r - s.$$

Y de esta última desigualdad se sigue que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > s,$$

para toda $n \geq N$. Por lo tanto $a_{N+k} > s^k a_N$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y de aquí que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0.$$

Por el Teorema 2, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

(3) Considere la sucesión $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$. Se tiene que $a_n > 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Pero, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge. Por otro lado, si consideramos la sucesión $\{b_n\} = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$, se tiene que $b_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Pero, como veremos más adelante, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Así, terminamos nuestra demostración. ∎

Ejemplo 10 *Indique si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *converge o no.*

Solución. Considere la sucesión $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n!} \right\}$. Se tiene que $a_n > 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Así, por el Teorema 9, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge. ∎

Ejemplo 11 *Indique para que* $r \geq 0$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n r^n$ *converge.*

Solución. Considere la sucesión $\{a_n\} = \{nr^n\}$. Se tiene que $a_n > 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r(n+1)}{n} = r.$$

Así, por el Teorema 9, si $0 \leq r < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ converge; si $r > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ no converge y finalmente, si $r = 1$, es claro que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$ no converge. ■

En todos los capítulos anteriores hemos utilizado el concepto de integral y este no será la excepción.

Teorema 12 (Criterio de la Integral) *Sea $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función positiva y decreciente. Si consideramos la sucesión $\{a_n\} = \{f(n)\}$, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f$ existe.*

Demostración. Note que, por ser f decreciente en $[1, \infty)$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f \leq f(n),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f \leq a_n, \tag{5}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, tenemos, por la segunda desigualdad de (5) que

$$\int_1^n f = \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} f \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Es decir, la sucesión $\left\{ \int_1^n f \right\}$ es acotada superiormente. Como además es creciente, pues f es positiva, tenemos que $\left\{ \int_1^n f \right\}$ converge, es decir, existe

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f,$$

esto es, la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f$$

existe.

Por otro lado, si suponemos que la integral impropia $\int_1^{\infty} f$ existe, por la primer desigualdad de (5), tenemos que

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} f = \int_1^{n} f \leq \int_1^{\infty} f.$$

Y de aquí que la sucesión $\left\{ \sum_{i=2}^{n} a_i \right\}$ es acotada superiormente, pero además es creciente pues f es positiva, por lo que es convergente, es decir, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge. De aquí, se sigue que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge. ■

Ejemplo 13 *Sea $p > 0$. Indique si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge o no.*

Solución. Consideremos la función $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Note que f es positiva y decreciente. Además

$$\int_1^{N} f = \begin{cases} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{N^{p-1}(p-1)} & \text{si } p \neq 1 \\ \ln(N) & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Así, tenemos que $\lim_{N \to \infty} \int_1^{N} f$ existe si $p > 1$, pero si $p \leq 1$, entonces no existe. Así, por el Teorema 12, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y si $p \leq 1$ no converge.

Note que, como casos particulares, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge. ■