# Cálculo diferencial e integral II
# Tarea 01

**Indicaciones**: Resuelva exactamente 8 ejercicios.
**Fecha de entrega:** 13 de octubre de 2021.

1. Sea $b > 0$. Considere la función $f : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Muestre que $f$ es integrable en $[0, b]$ y halle $\int_0^b f$.

2. Sean $a, b, c, r, s \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $c \in (a, b)$ y $r < s$. Definimos $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante
$$f(x) = \begin{cases} r & \text{si } x \neq c, \\ s & \text{si } x = c. \end{cases}$$
Indique si $f$ es integrable en $[a, b]$. Argumente su respuesta. ¿Su respuesta cambia si $c = a$ o $c = b$? Argumente su respuesta.

3. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \text{ es racional}, \\ 2 - x & \text{si } x \text{ es irracional}. \end{cases}$$
Decida si $f$ es integrable en $[0, 1]$. Argumente su respuesta.

4. Sea $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$. Indique si $f$ es integrable en $[0, 2]$. Argumente su respuesta.

5. Sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x - c)dx.$$

6. Sea $f$ una función integrable en $[a, b]$ y no negativa en $[a, b]$. Demuestre que si $f$ es continua en $c \in [a, b]$ y $f(c) > 0$, entonces $\int_a^b f > 0$.

7. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y tal que $f$ es continua en cada punto de $[a, b]$ excepto en un punto $x_0 \in [a, b]$. Demuestre que $f$ es integrable en $[a, b]$.

8. Muestre que
$$\frac{5\sqrt{2}}{6} \leq \int_{2}^{9/2} \frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}^2(x)}\, dx \leq \frac{15}{4\sqrt{2}}.$$

9. Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función. Definimos las funciones $f^+, f^- : [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ como sigue
$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0, \\ 0 & \text{si } f(x) \leq 0, \end{cases}$$
y
$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0, \end{cases}$$
Llamamos a $f^+$ la parte positiva de $f$ y a $f^-$ la parte negativa de $f$. Demuestre que si $f$ es integrable sobre $[a,b]$, entonces:

   *a*) $f^+$ y $f^-$ son integrables sobre $[a,b]$.

   *b*) $|f|$ es integrable sobre $[a,b]$ y
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

10. Sean $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones integrables sobre $[a,b]$. Demuestre que:

   *a*) $f^2$ es integrable sobre $[a,b]$.

   *b*) $fg$ es integrable. Sugerencia: Demuestre que $(f+g)^2$ es integrable.