Última actualización: 22 de octubre de 2021

Cálculo diferencial e integral II
Tarea 02

Indicaciones: Resuelva exactamente 8 ejercicios.
Fecha de entrega: 29 de octubre de 2021.

(1). Sean $a, b, d \in \mathbb{R}$ fijos con $a < b$. Para $c \in (a, b)$ definimos $f_c : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f_c(x) = \begin{cases} d & \text{si } x \leq c, \\ -d & \text{si } x > c. \end{cases}$$

Demuestre que existe $\alpha \in [a, b]$ tal que para cualquier $x \in [a, b]$ se cumple que

$$\int_a^\alpha f_c \geq \int_a^x f_c.$$

(2). Sean $a, b > 0$. Pruebe que existe $x \in [a-2, a+2]$ tal que

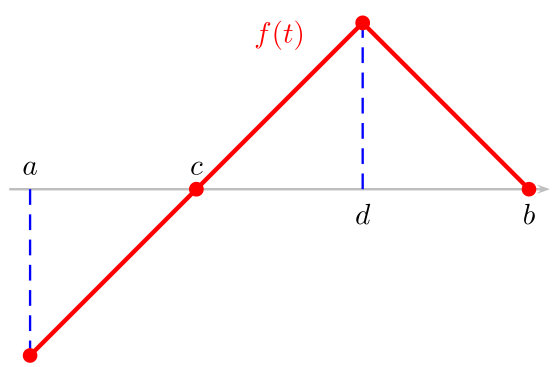
$$\int_{a-2}^{x} \left(b + \sqrt{1 - \frac{(t-a)^2}{4}} \right) dt = \frac{\pi}{2}.$$

Sugerencia: Puede utilizar que el área de una elipse es π por el producto de las longitudes de sus semiejes y que

$$\int_{a-2}^{a+2} \left(b + \sqrt{1 - \frac{(t-a)^2}{4}} \right) dt = \pi + 4b.$$

(3). Suponga que cada uno de los siguientes dibujos representa la gráfica de una función f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Utilizando técnicas de cálculo, esboce la gráfica de la función $F : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indicada en cada caso.

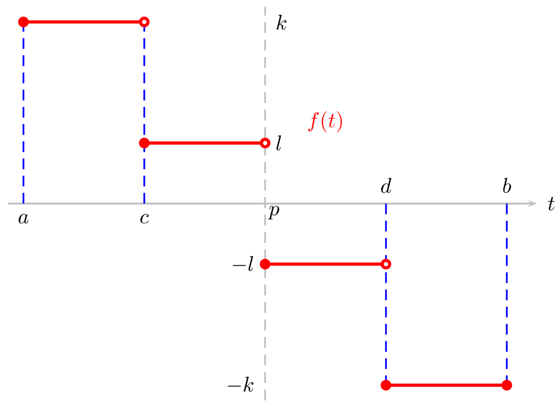
a)



donde $F : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

b)



donde $[a,c]$ y $[d,b]$ tienen la misma longitud, $[c,p]$ y $[p,d]$ tienen la misma longitud y la función $F:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ está definida por

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

(4). Halle la derivada de cada una de las siguientes funciones. *En este ejercicio puede suponer que todas las composiciones tienen sentido.*

a) $F(x)=\displaystyle\int_3^{\left(\int_2^x sen^3 t\,dt\right)}\frac{dt}{1+sen^6 t+t^2}$

b) $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{t^2\,dt}{sen\,t+cos\,t+1}$

c) $F(x)=\displaystyle\int_3^x\sqrt{sen\,t+t^2}\,dt$

(5). Sea $k\geq 0$ fijo. Use el Teorema Fundamental del Cálculo para demostrar que si $n\in\mathbb{N}$, entonces para cualquier $x\geq 1+k$ se cumple que

$$\int\limits_{1+k}^{(x-k)^n+k}\frac{1}{t-k}dt=n\int\limits_{1+k}^{x}\frac{1}{t-k}dt.$$

(6). Sea $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable con $f(a)=\int_a^b f$. Pruebe que

$$\int\limits_a^x\big(f'(t)+f(t)\big)dt=f(x)-\int\limits_x^b f(t)\ dt.$$

(7). Sean $f,g:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones continuas con $g(x)>0$ para toda $x\in[a,b]$, muestre que existe $c\in(a,b)$ tal que

$$\frac{\int\limits_a^b f}{\int\limits_a^b g}=\frac{f(c)}{g(c)}.$$

Sugerencia: Considere $h(x)=G(x)\int_a^b f-F(x)\int_a^b g$, para alguna F y G adecuadas.

(8). Decida si las siguientes integrales impropias existen. Justifique su respuesta.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ *b*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{3/2}}\ dx$

(9). Sean $f, g : [0, a] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $0 \le g(x) \le f(x)$ para toda $x \in (0, a]$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \infty$, la integral impropia $\displaystyle\int_0^a f$ existe y para toda $0 < \varepsilon \le a$ existe $\displaystyle\int_\varepsilon^a g$. Demuestre que existe $\displaystyle\int_0^a g$.

(10). Definimos un tercer tipo de integral impropia para funciones no acotadas sobre intervalos no acotados: Sea $f : [0, \infty) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no negativa tal que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$. Si existen $\displaystyle\int_0^a f$ y $\displaystyle\int_a^\infty f$, definimos la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty f$ como

$$\int_0^\infty f = \int_0^a f + \int_a^\infty f.$$

Averigüe si existen las siguientes integrales impropias. Justifique su respuesta.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\ dx.$

b) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\ dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \le 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$