

Cálculo diferencial e integral II

Tarea 03

Indicaciones: Resuelva exactamente 8 ejercicios.

Fecha de entrega: 15 de noviembre de 2021.

- (1). Demuestre, usando técnicas de cálculo, que $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (2). Halle los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - \sin(x)}{x(1 - \cos(x))}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan(x)}{\sin^3(x)}$

- (3). Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\int_0^x \left(\frac{1}{2} - \cos^2(2t) \right) dt}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

- (4). Demuestre la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- a) Para todo $x \neq 0$ se cumple que $\sin(2x) \neq 2\sin(x)$.
- b) Para cualquier x existe un y tal que $\cos(x + y) = \cos(x) + \cos(y)$.
- c) Existe $x \neq 0$ tal que $\sin(x + y) = \sin(x) + \sin(y)$ para todo y .
- d) Existe $y \neq 0$ tal que $\int_0^y \sin(x) dx = \sin(y)$.

- (5). Demuestre que $|\sin(x) - \sin(y)| < |x - y|$ para todos los números $x \neq y$.

- (6). Demuestre que para toda $x \neq -1$ se cumple que

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

- (7). Demuestre que la función seno es una función impar utilizando técnicas de cálculo.

- (8). Halle una fórmula para $\sin(3\alpha)$ y $\cos(3\alpha)$ y utilice estas fórmulas para hallar el valor de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

- (9). Halle expresiones equivalentes para $\sin(\arctan(x))$ y $\cos(\arctan(x))$ que no incluyan funciones trigonométricas.

- (10). Suponga que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Expresar $\sin(x)$ y $\cos(x)$ en términos de t .