*Última actualización: 1 de diciembre de 2021*

# Cálculo diferencial e integral II
# Tarea 04

**Indicaciones**: Resuelva exactamente 8 ejercicios.
**Fecha de entrega:** 6 de diciembre de 2021.

(1). Derive las siguientes funciones.

*a*) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2^x}{x^2-2^x}\right)$

*b*) $f(x) = 3x^{\sqrt{x}}$

*c*) $f(x) = (\operatorname{sen}(x))^{(\cos(x))^x}$

*d*) $f(x) = \log_{e^x}(\operatorname{sen}(x))$

*e*) $f(x) = \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}\right)\right]^{\ln(\operatorname{sen}(e^x))}$

*f*) $f(x) = e^{e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)}}$

(2). Calcule los siguientes límites.

*a*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)}{\ln(1+x)}$

*b*) $\lim\limits_{x\to\infty} \left( e^{-x^2} \displaystyle\int_x^{x+\frac{\ln(x)}{x}} e^{-t^2}dt \right)$

(3). Muestre que para cualesquiera $x, y > 0$ se cumple que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Use la desigualdad anterior para demostrar que si $a, b, c > 1$, entonces

$$\log_a(bc) + \log_b(ca) + \log_c(ab) \geq 4[\log_{bc}(a) + \log_{ca}(b) + \log_{ab}(c)].$$

(4). Demuestre que la ecuación $e^x - x - 1 = 0$ tiene una única solución. Halle dicha solución.

(5). Usando técnicas de cálculo, esboce las gráficas de las funciones senh, cosh y tanh.

(6). Demuestre todas las propiedades de las funciones hiperbólicas y de sus “inversas” que no se demostraron en la Clase 22.

(7). Pruebe que

$$\int_0^{\operatorname{senh}(x)} \sqrt{t^2+1}dt = \frac{x}{2} + \frac{\cosh(x)\cdot\operatorname{senh}(x)}{2}.$$

(8). Sea $f$ una función continua tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$f(x) = \int_0^x e^t f(t)dt.$$

Demuestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ce^{(e^x-1)}$.

(9). Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}$ tal que para todo $x\in\mathbb{R}$ se cumple que

$$\int_0^{f(x)} f^2(t)\ dt = f(f(x)).$$

Pruebe que existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $f(f(x)) = c\exp\left(\int_0^{f(x)} f(t)\ dt\right)$.

(10). Sea $p(x)$ una función polinomial tal que $p'(x)\neq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. ¿Existen funciones continuas $f$ tales que $\int_0^{p(x)} f = 1-e^{2p(x)}$? En caso de que existan funciones $f$ con dicha propiedad, exhiba al menos una de ellas; dé un argumento en caso de que la respuesta sea negativa.