Última actualización: 6 de enero de 2022

Cálculo diferencial e integral II
Tarea 05

Indicaciones: Resuelva exactamente 8 ejercicios.
Fecha de entrega: Cualquier momento antes del 28 de enero de 2022.

(1). Calcule exactamente 3 de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(x))}{x\ln(x)}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$

d) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$

(2). Calcule exactamente 3 de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \cos(\ln(x))dx$

b) $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{x^2-1})dx$

c) $\displaystyle\int \sec^3(x)dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\operatorname{sen}(x)}dx$

(3). Calcule exactamente 3 de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$

c) $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen}(x))^2dx$

d) $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}dx$

(4). Calcule exactamente 3 de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^2+6}{x^3-16x}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+1}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$

d) $\displaystyle\int \frac{3e^x}{e^{2x}+5e^x+6}dx$

(5). Calcule exactamente 3 de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\operatorname{sen}(x)}$

b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{\cos^2(x)}dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{\tan(x)}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{e^{1-\cos(2x)}}}{\sec(x)}dx$

(6). En cada inciso, encuentre el área entre las curvas indicadas:

a) $y = 4x - x^2$ y $y = x^2$.

b) $y = \ln(x)$ y $y = (\ln(x))^2$.

(7). Resuelva exactamente 2 de los siguientes problemas:

a) Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por las gráficas de $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ alrededor del eje X.

b) Encuentre el volumen del *toro* obtenido al rotar la circunferencia $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ alrededor del eje Y, considere que $a > r > 0$, .

c) Demuestre que el área de la superficie de una esfera de radio $r > 0$ es $4\pi r^2$.

(8). Calcule exactamente 3 de las siguientes integrales:

a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(x)}{1+e^{x^3}} dx.$$

b) $$\int_{2}^{3} \frac{1}{1+e^{5-2x}} dx.$$

c) $$\int_{3}^{5} \frac{\ln(x^3)}{\ln\left(\frac{x^3}{2}\right) + \ln(1024 - 384x - 48x^2 - 2x^3)} dx.$$

d) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(x))^{\sqrt{e}}}{(\cos(x))^{\sqrt{e}} + (\sin(x))^{\sqrt{e}}} dx.$$

(9). Resuelva los siguientes problemas:

a) Considere las funciones $f,\, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definidas mediante

$$f(Q) = \frac{6000}{Q+50} \quad \text{y} \quad g(Q) = Q + 10.$$

Encuentre un intervalo $I \subseteq [0,\infty)$ tal que $0 \in I$ y f y g son no negativas en I, y además determine las respectivas curvas de oferta y demanda. Pruebe que existe un punto de equilibrio para f y g, y encuentre el superávit del productor y del consumidor.

b) Suponga que X es una variable aleatoria continua asociada a un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ cuya función de densidad de probabilidad está dada como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{si } x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

En este caso decimos que X tiene una *distribución uniforme* sobre $[-1,1]$ y lo denotamos por $X \sim \mathrm{U}(-1,1)$. Calcule

$$P\left[X^2 \leq \frac{1}{4}\right] = P\left[\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, X^2(\omega) \leq \frac{1}{4}\right\}\right].$$

(10). Resuelva exactamente 2 de los siguientes problemas:

a) Halle la longitud de arco de la curva $f(x) = ln(x)$ desde $x = \sqrt{3}$ hasta $x = \sqrt{8}$.

b) Se quiere diseñar un reloj para la plaza principal de una ciudad cuyas manecillas no sean rectas, sino secciones parabólicas a partir del vértice. Para ello, es necesario que los ingenerios conozcan el momento de inercia de las nuevas manecillas. ¿Puede ayudarles? Considere que la varilla tiene masa total M y que dicha masa está distribuida de manera homogénea a lo largo de la manecilla. (*Sugerencia*: Se puede considerar a la manecilla como una varilla *delgada* que coinicide con la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,a]$ y que tiene su punto fijo (el centro de giro) en el origen.)

c) Calcule el momento de inercia de un anillo delgado de radio 1 m y masa M que puede girar respecto a su centro geométrico. (*Sugerencia*: Considere medio anillo en primer lugar.)