Cálculo diferencial e integral II
Tarea 06

Indicaciones: Resuelva exactamente 5 ejercicios.
Fecha de entrega: Miércoles 26 de enero de 2022.

(1). Calcule el polinomio de Taylor de las siguientes funciones, del grado indicado y en el punto indicado.

a) cos; grado $2n$, en π.

b) $f(x) = x^5 + x^3 + x$; grado 5, en 0.

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; grado $2n+1$, en 0.

(2). Aproxime cada uno de los siguientes números con el grado que se específica.

a) $\operatorname{sen}(1)$, error $< 10^{-17}$ *b*) $\operatorname{sen}(1/2)$, error $< 10^{-20}$ *c*) e^2, error $< 10^{-5}$

(3). Demuestre que π se puede aproximar como 3.14159. Use que

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

(4). Halle los siguientes límites usando polinomios de Taylor.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x - \operatorname{sen}(x)}$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2\operatorname{sen}^2(x)}$ *c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x^2)}\right)$

(5). Pruebe que si $x > 0$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $e^x \geq \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$.

(6). En este problema se estudia la relación entre las funciones pares e impares y las potencias que aparecen en sus polinomios de Taylor. Suponga que f es una función diferenciable.

a) Muestre que si f es una función par, entonces f' es una función impar. Además, pruebe que si f es una función impar, entonces f' es una función par.

b) Demuestre que si f es una función impar, entonces $f(0) = 0$.

c) Muestre que si f es una función impar, entonces $f^{(n)}(0) = 0$ para cualquier n par.

d) Pruebe que si f es una función impar, entonces el polinomio de Taylor de grado $n \geq 1$ de f en 0, sólo contiene potencias impares de x.

¿Qué puede decir acerca del polinomio de Taylor si supone que f es una función par?