Última actualización: 29 de enero de 2022

Cálculo diferencial e integral II
"Tarea" 07

Indicaciones:

(1). Cada ejercicio tiene asignado un puntaje. Puntaje máximo posible: 2.5 puntos.

(2). Resuelva la cantidad de ejercicios que desee.

(3). Los puntos que obtenga en esta tarea serán sumados a la calificación que obtuvo promediando las tareas anteriores y esa será su calificación final. Por ejemplo, si tiene un promedio de 6.5 con las tareas anteriores y en esta Tarea 07 obtiene 1.5 puntos, su calificación final será 8.

Fecha de entrega: Martes 1 de febrero de 2022
Atención: Recuerde que la entrega de esta tarea es opcional.

1. Demuestre los siguiente límites usando la definición.
   (a) (0.25 puntos) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-3n^5}{3n^4-10} = -\infty$.
   (b) (0.25 puntos) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-n^4}{n^4-\sqrt{2}} = -1$

2. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que:
   (a) (0.20 puntos) Si $1 < a$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$. (Sugerencia: Note que $a = 1 + h$ con $h > 0$).
   (b) (0.15 puntos) Si $0 < a < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
   (c) (0.15 puntos) Si $0 < a < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

3. (0.50 puntos) Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida como sigue

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

   Pruebe que $\{a_n\}$ es convergente y encuentre el límite.

4. (0.50 puntos) Determine si las siguientes series convergen o no. Justifique su respuesta. Cada inciso correctamente respondido vale 1/12.

   (1). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[4]{n^3+10}}$

   (2). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+10}{n^5}$

   (3). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+24)^3}{(n+31)!}$

   (4). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}$

   (5). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3\left(1-n^4\right)}{n^4}$

   (6). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

5. (0.50 puntos) Pruebe que si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.