Ayudantía 01
Teorema de Pitágoras y ángulos en $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 1. *(i). Sean $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$ tales que $\overline{x}_i \cdot \overline{x}_j = 0$ si $i \neq j$. Pruebe el **teorema de Pitágoras**:*

$$\|\overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_k\|^2 = \|\overline{x}_1\|^2 + \cdots + \|\overline{x}_k\|^2.$$

(ii). Si además $\|\overline{x}_i\| = 1$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ y consideramos $\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \cdots + \alpha_k\overline{x}_k$, demuestre que

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2}$$

Demostración. (i) Consideremos $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$ tales que $\overline{x}_i \cdot \overline{x}_j = 0$ si $i \neq j$. Vamos a usar las propiedades del producto punto en $\mathbb{R}^n$ para resolver este problema. En primer lugar, notamos que

$$\|\overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_k\|^2 = (\overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_k) \cdot (\overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_k),$$

luego, al usar la propiedad distributiva del producto interior, obtenemos que

$$\begin{aligned}(\overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_k) \cdot (\overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_k) &= \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_k + \cdots + \overline{x}_k \cdot \overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_k \cdot \overline{x}_k \\ &= \sum_{i=1}^{k} \overline{x}_i \cdot \overline{x}_i + \sum_{i \neq j} \overline{x}_i \cdot \overline{x}_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \|\overline{x}_i\|^2\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene porque $\overline{x}_i \cdot \overline{x}_i = \|\overline{x}_i\|^2$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$ (vea la **Observación 2** de la **Clase 02**) y por hipótesis se cumple que $\overline{x}_i \cdot \overline{x}_j = 0$ para cualesquiera $i \neq j$. En conclusión, hemos demostrado que

$$\|\overline{x}_1 + \cdots + \overline{x}_k\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|\overline{x}_i\|^2 = \|\overline{x}_1\|^2 + \cdots \|\overline{x}_k\|^2.$$

Esto termina la prueba.

(ii) Supogamos que además $\|\overline{x}_i\| = 1$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Consideremos $\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \cdots + \alpha_k\overline{x}_k$. Entonces, por el inciso (i) se cumple que

$$\begin{aligned}\|\overline{x}\|^2 &= \|\alpha_1\overline{x}_1 + \cdots + \alpha_k\overline{x}_k\|^2 \\ &= \|\alpha_1\overline{x}_1\|^2 + \cdots + \|\alpha_k\overline{x}_k\|^2 \\ &= (|\alpha_1| \ \|\overline{x}_1\|)^2 + \cdots + (|\alpha_1| \ \|\overline{x}_k\|)^2 \\ &= \alpha_1^2\|\overline{x}_1\|^2 + \cdots + \alpha_1^2\|\overline{x}_k\|^2\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se obtiene por propiedades de la norma de $\mathbb{R}^n$ (vea el **Teorema 7** de la **Clase 01**). Luego, como $\|\overline{x}_i\|^2 = 1$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, se sigue que

$$\|\overline{x}\|^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2,$$

a partir de lo cual se concluye que

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2}.$$

■

Ejercicio 2. *Sean $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$. Pruebe e interprete geométricamente los siguientes resultados.*

(i). $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0$ *si y sólo si* $\|\overline{x}+\overline{y}\| = \|\overline{x}-\overline{y}\|$.

(ii). $\overline{x} \cdot \overline{y} > 0$ *si y sólo si* $\|\overline{x}+\overline{y}\| > \|\overline{x}-\overline{y}\|$.

(iii). $\overline{x} \cdot \overline{y} < 0$ *si y sólo si* $\|\overline{x}+\overline{y}\| < \|\overline{x}-\overline{y}\|$.

Demostración. Ya que para todo $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $\|\overline{z}\| \geq 0$, tenemos que la condición $\|\overline{x}+\overline{y}\| = \|\overline{x}-\overline{y}\|$ es equivalente a $\|\overline{x}+\overline{y}\|^2 = \|\overline{x}-\overline{y}\|^2$. Pero, por las propiedades de la norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$, esto último es equivalente a que $(\overline{x}+\overline{y}) \cdot (\overline{x}+\overline{y}) = (\overline{x}-\overline{y}) \cdot (\overline{x}-\overline{y})$, lo cual se cumple si y sólo si

$$\overline{x} \cdot \overline{x} + 2\overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{y} \cdot \overline{y} = \overline{x} \cdot \overline{x} - 2\overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{y} \cdot \overline{y}$$

que equivale a que

$$2\overline{x} \cdot \overline{y} = -2\overline{x} \cdot \overline{y}$$

que ocurre si y sólo si

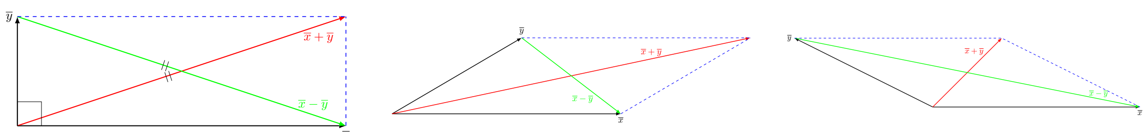
$$4\overline{x} \cdot \overline{y} = 0,$$

es decir

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = 0.$$

Notamos que esta misma prueba funciona si cambiamos el signo de igualdad por el de desigualdad, así que esto termina la prueba.

Finalmente, una interpretación geométrica en el plano $\mathbb{R}^2$ se muestra en la Figura 1.



(a) $\|\overline{x}+\overline{y}\| = \|\overline{x}-\overline{y}\|$ (b) $\|\overline{x}+\overline{y}\| > \|\overline{x}-\overline{y}\|$ (c) $\|\overline{x}+\overline{y}\| < \|\overline{x}-\overline{y}\|$

Figura 1: Interpretación geométrica

■

Observación. En este caso fue posible realizar la demostración de un *si y sólo si* en pocos pasos ya que siempre estuvimos trabajando con igualdades (respectivamente, desigualdades), sin embargo, en la mayoría de las pruebas de equivalencia es necesario demostrar cada implicación por separado.

Ejercicio 3. *Sean $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$. Pruebe e interprete geométricamente los siguientes resultados.*

(i). *Si* $\|\overline{x}\| = \|\overline{y}\| = \|\overline{x}-\overline{y}\|$, *entonces el ángulo entre* $\overline{x}$ *y* $\overline{y}$ *es* $\frac{\pi}{3}$.

(ii). *Si* $\|\overline{x}\| = \|\overline{x}-\overline{y}\|$, *entonces el ángulo entre* $\overline{x}$ *y* $\overline{y}$ *es igual al ángulo entre* $\overline{y}$ *y* $\overline{y}-\overline{x}$.

Demostración. (i) En virtud de la **Definición 5** de la **Clase 02**, si θ es el ángulo entre $\overline{x}$ y $\overline{y}$, entonces $\theta \in [0, \pi]$, y ya que la función $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ es biyectiva, nos basta ver que

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

es es, demostraremos que

$$\frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\|\overline{x}\| \ \|\overline{y}\|} = \frac{1}{2}.$$

Ya que $\|\overline{x} - \overline{y}\| = \|\overline{y}\|$, y también $\|\overline{z}\| \geq 0$ para toda $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$, se obtiene que $\|\overline{x} - \overline{y}\|^2 = \|\overline{y}\|^2$. Esto último implica que

$$(\overline{x} - \overline{y}) \cdot (\overline{x} - \overline{y}) = \overline{y} \cdot \overline{y},$$

es decir,

$$\overline{x} \cdot \overline{x} - 2\overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{y} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{y},$$

de donde

$$\|\overline{x}\|^2 = 2\overline{x} \cdot \overline{y}.$$

Ahora, como $\overline{x} \neq \overline{0}$, en particular $\|\overline{x}\|^2 \neq 0$, por lo cual la igualdad anterior implica que

$$\frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\|\overline{x}\|^2} = \frac{1}{2}.$$

Finalmente, ya que $\|\overline{x}\| = \|\overline{y}\|$, tenemos que $\|\overline{x}\| \ \|\overline{y}\| = \|\overline{x}\|^2$, se concluye que

$$\frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\|\overline{x}\| \ \|\overline{y}\|} = \frac{1}{2}.$$

Esto prueba lo deseado.

(ii) Sean θ_1 el ángulo entre $\overline{x}$ y $\overline{y}$, y θ_2 el ángulo entre $\overline{y}$ y $\overline{y} - \overline{x}$. Ya que la función $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ es biyectiva, nos basta demostrar que $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$.

Ya que por hipótesis se tiene que $\|\overline{x}\| = \|\overline{x} - \overline{y}\|$ y también $\|\overline{x} - \overline{y}\| = \|\overline{y} - \overline{x}\|$ (¿por qué?), se cumple que

$$\cos(\theta_1) = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\|\overline{x}\| \ \|\overline{y}\|} = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\|\overline{y}\| \ \|\overline{y} - \overline{x}\|}.$$

Ahora, como

$$\begin{aligned}
\overline{x} \cdot \overline{y} &= \overline{y} \cdot (\overline{y} - \overline{x}) + \overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{y} \cdot (\overline{y} - \overline{x}) \\
&= \overline{y} \cdot (\overline{y} - \overline{x}) + \overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{y} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{y} \\
&= \overline{y} \cdot (\overline{y} - \overline{x}) + 2\overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{y} \cdot \overline{y}
\end{aligned}$$

porque solamente estamos sumando cero. Así, al sustituir obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\|\overline{y}\| \ \|\overline{y} - \overline{x}\|} &= \frac{\overline{y} \cdot (\overline{y} - \overline{x}) + 2\overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{y} \cdot \overline{y}}{\|\overline{y}\| \ \|\overline{y} - \overline{x}\|} \\
&= \frac{\overline{y} \cdot (\overline{y} - \overline{x})}{\|\overline{y}\| \ \|\overline{y} - \overline{x}\|} + \frac{2\overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{y} \cdot \overline{y}}{\|\overline{y}\| \ \|\overline{y} - \overline{x}\|} \\
&= \cos(\theta_2) + \frac{2\overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{y} \cdot \overline{y}}{\|\overline{y}\| \ \|\overline{y} - \overline{x}\|}
\end{aligned}$$

con lo cual hemos obtenido que

$$\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) + \frac{2\overline{x}\cdot\overline{y} - \overline{y}\cdot\overline{y}}{\|\overline{y}\|\ \|\overline{y}-\overline{x}\|}.$$

Como queremos demostrar que $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2)$, nos resta por ver que

$$\frac{2\overline{x}\cdot\overline{y} - \overline{y}\cdot\overline{y}}{\|\overline{y}\|\ \|\overline{y}-\overline{x}\|} = 0.$$

Sin embargo, vemos que el numerador cumple que

$$\begin{aligned} 2\overline{x}\cdot\overline{y} - \overline{y}\cdot\overline{y} &= \overline{x}\cdot\overline{x} - \overline{x}\cdot\overline{x} + 2\overline{x}\cdot\overline{y} - \overline{y}\cdot\overline{y} \\ &= \|\overline{x}\|^2 - (\overline{x}\cdot\overline{x} - 2\overline{x}\cdot\overline{y} + \overline{y}\cdot\overline{y}) \\ &= \|\overline{x}\|^2 - ((\overline{x}-\overline{y})\cdot(\overline{x}-\overline{y})) \\ &= \|\overline{x}\|^2 - \|\overline{x}-\overline{y}\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde la primera igualdad es cierta porque estamos sumando un cero, la segunda igualdad se sigue por una propiedad del producto interior en $\mathbb{R}^n$ y porque factorizamos -1, la tercera igualdad se verifica al realizar el producto interior indicado, la siguiente igualdad es cierta por una propiedad del producto interior, y la última igualdad es cierta por la hipótesis del problema. Esto demuestra que

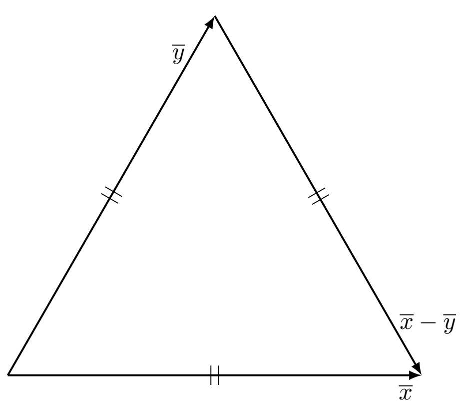
$$\frac{2\overline{x}\cdot\overline{y} - \overline{y}\cdot\overline{y}}{\|\overline{y}\|\ \|\overline{y}-\overline{x}\|} = 0,$$

y por lo tanto

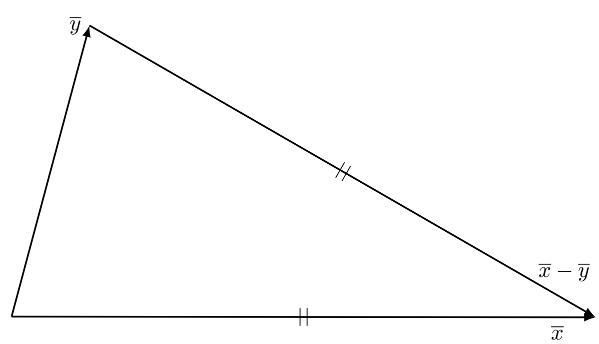
$$\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2).$$

Finalmente, como se mencionó al principio de la prueba, por la inyectividad de la función cos en $[0,\pi]$, obtenemos que $\theta_1 = \theta_2$. Esto termina la prueba.

Una interpretación geométrica en $\mathbb{R}^2$ se muestra en la Figura 2. ■



(a) $\|\overline{x}\| = \|\overline{y}\| = \|\overline{x}-\overline{y}\|$



(b) $\|\overline{x}\| = \|\overline{x}-\overline{y}\|$

Figura 2: Interpretación geométrica