Ayudantía 02
Normas uno e infinito en $\mathbb{R}^n$

En esta sesión retomamos *las otras normas* de $\mathbb{R}^n$ mencionadas por Oscar, esto es:

Definición 1. Para cada $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos:

(i). la **norma uno** de $\overline{x}$, denotada por $\|\overline{x}\|_1$, como

$$\|\overline{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

(ii). la **norma infinito** de $\overline{x}$, denotada por $\|\overline{x}\|_\infty$, como

$$\|\overline{x}\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

En primer lugar, cumplimos con el anuncio hecho por Oscar: se demostrará que las normas uno e infinito en efecto merecen dicho nombre, es decir, son normas.

Lema 2. *(i). La norma uno $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada en la Definición 1 es una norma en $\mathbb{R}^n$.*

(ii). La norma infinito $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada en la Definición 1 es una norma en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Para comenzar la prueba, recordemos que en cada caso se deben demostrar tres condiciones: la no negatividad de la función, la propiedad respecto a los *escalares*, y la desigualdad del triángulo (vea la **Definición 8** de la **Clase 01**).

(i) Para la prueba de cada inciso, consideremos $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. En primer lugar notemos que

$$\|\overline{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \geq 0$$

porque $|z| \geq 0$ para toda $z \in \mathbb{R}$ y la suma de números no negativos sigue siendo no negativa.

Ahora, supongamos que $\|\overline{x}\|_1 = 0$, esto es, $|x_1| + \cdots + |x_n| = 0$. Esto implica que $x_i = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots . n\}$, porque $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$, y en caso de que exista $x_i \neq 0$, entonces $|x_i| > 0$, lo cual implica que $|x_1| + \cdots + |x_i| + \cdots + |x_n| > 0$, pero esto contradice nuestra hipótesis, por lo cual, $x_i = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, esto es, $\overline{x} = \overline{0}$. Ya que claramente $\|\overline{0}\|_1 = 0$, esto prueba que $\|\overline{x}\|_1 = 0$ si y sólo si $\overline{x} = \overline{0}$.

A continuación, ya que $\lambda\overline{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\lambda\overline{x}\|_1 &= |\lambda x_1| + \cdots + |\lambda x_n| \\
&= |\lambda|\,|x_1| + \cdots + |\lambda|\,|x_n| \\
&= |\lambda|\,(|x_1| + \cdots + |x_n|) \\
&= |\lambda|\,\|\overline{x}\|_1
\end{aligned}$$

Finalmente demostremos la desigualdad del triángulo. Tenemos que $\overline{x}+\overline{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, y además, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ por la desigualdad del triángulo para el valor absoluto de números reales, por lo cual:

$$\begin{aligned}
\|\overline{x} + \overline{y}|_1 &= \|\,(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\,\|_1 \\
&= |x_1 + y_1| + \cdots + |x_n + y_n| \\
&\leq (|x_1| + |y_1|) + \cdots + (|x_n| + |y_n|)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (|x_1| + \cdots + |x_n|) + (|x_n| + |y_n|) \\
&= \|\overline{x}\|_1 + \|\overline{y}\|_1.
\end{aligned}
$$

Esto prueba lo deseado.

En virtud de lo anterior, hemos demostrado que $\|\cdot\|_1$ cumple las tres propiedades de la definición de norma, por lo cual, $\|\cdot\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

(ii) Nuevamente, tomemos $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

En primer lugar, ya que $|z| \geq 0$ para toda $z \in \mathbb{R}$, es inmediato que $\|\overline{x}\|_\infty \geq 0$. Por otro lado, si $\|\overline{x}\|_\infty = 0$, entonces $\text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = 0$, esto es, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $|x_i| \leq 0$, y ya que por las propiedades del valor absoluto sabemos que $0 \leq |x_i|$, entonces

$$0 \leq |x_i| \leq 0$$

de donde se sigue que $|x_i| = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Lo anterior implica que $x_i = 0$ por las propiedades del valor absoluto, y de aquí se obtiene que $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0) = \overline{0}$. Ya que $\|\overline{0}\|_\infty = 0$, se concluye que $\|\overline{x}\|_\infty = 0$ si y sólo si $\overline{x} = \overline{0}$.

Ya que $\lambda\overline{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, y sabemos que si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío tal que existe $\text{máx}(A)$, y $b \geq 0$, entonces $\text{máx}(bA) = b\,\text{máx}(A)$, donde $bA = \{ba \mid a \in A\}$ (¿puede demostrar esta afirmación sobre conjuntos?), se obtiene que

$$\text{máx}\{|\lambda|\,|x_1|, \ldots, |\lambda|\,|x_n|\} = |\lambda|\,\text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = |\lambda|\,\|\overline{x}\|_\infty.$$

Pero

$$\|\lambda\overline{x}\|_\infty = \text{máx}\{|\lambda x_1|, \ldots, |\lambda x_n|\} = \text{máx}\{|\lambda|\,|x_1|, \ldots, |\lambda|\,|x_n|\},$$

de donde se sigue que

$$\|\lambda\overline{x}\|_\infty = |\lambda|\,\|\overline{x}\|_\infty.$$

Finalmente demostraremos la desigualdad del triángulo. Supongamos que para el índice $j \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que

$$\|\overline{x} + \overline{y}\|_\infty = \text{máx}\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\} = |x_j + y_j|.$$

Entonces

$$\|\overline{x} + \overline{y}\|_\infty \leq |x_j| + |y_j|$$

por la desigualdad del triángulo del valor absoluto. Para concluir, notamos que si $a \in A$, entonces $a \leq \text{máx}(A)$, de donde se sigue que

$$|x_j| \leq \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \|\overline{x}\|_\infty$$

y también

$$|y_j| \leq \text{máx}\{|y_1|, \ldots, |y_n|\} = \|\overline{y}\|_\infty,$$

así que al unir las tres desigualdades anteriores se obtiene que

$$\|\overline{x} + \overline{y}\|_\infty \leq |x_j| + |y_j| \leq \|\overline{x}\|_\infty + \|\overline{y}\|_\infty$$

Esto prueba lo deseado.

En virtud de lo anterior, hemos demostrado que $\|\cdot\|_\infty$ cumple las tres propiedades de la definición de norma, por lo cual, $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $\mathbb{R}^n$. ■

Una vez que sabemos lo anterior, probaremos un resultado que involucra a las tres normas que conocemos en $\mathbb{R}^n$.

Lema 3. *Si* $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, entonces* $|x_i| \leq \|\overline{x}\|, \|\overline{x}\|_1, \|\overline{x}\|_\infty$ *para* $i = 1, \dots, n$*.*

Demostración. Haremos la prueba norma por norma.

Para el caso de la norma infinito, tenemos que, en general, si $A \subset \mathbb{R}$ admite máximo, entonces $a \leq \text{máx}(A)$ para toda $a \in A$, de donde, en particular, se cumple que

$$|x_i| \leq \text{máx}\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \|\overline{x}\|_\infty$$

para toda $i \in \{1, \dots, n\}$.

Para la norma usual se cumple que

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \|\overline{x}\|$$

para toda $i \in \{1, \dots, n\}$.

Finalmente, para la norma uno se satisface

$$|x_i| \leq |x_1| + \cdots |x_n| = \|\overline{x}\|_1$$

para toda $i \in \{1, \dots, n\}$.

Esto termina la prueba. ∎