Ayudantía 03
Puntos en bolas abiertas en el plano

En primer lugar, con la finalidad de ganar intuición, haremos un ejercicio con conjuntos en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 1. *Sean $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$ tales que $\overline{y} \in B_r(\overline{x})$. Si $\overline{x} = (x_1, x_2)$ y $\overline{y} = (y_1, y_2)$, definimos*

$$\overline{x}_0 = (x_1, x_2) = \overline{x},\ \overline{x}_1 = (y_1, x_2),\ \overline{x}_2 = (y_1, y_2) = \overline{y}$$

y también

$$\overline{y}_0 = (y_1, y_2) = \overline{y},\ \overline{y}_1 = (x_1, y_2),\ \overline{y}_2 = (x_1, x_2) = \overline{x}.$$

Pruebe que:

(i). Para cada $i \in \{1, 2\}$ se cumple que $\overline{x}_i, \overline{y}_i \in B_r(\overline{x})$.

(ii). Para cada $i \in \{1, 2\}$, definimos $\overline{\xi}_i = \overline{x}_{i-1} + \xi(\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1})$ y $\overline{\eta}_i = \overline{y}_{i-1} + \eta(\overline{y}_i - \overline{y}_{i-1})$, con $\xi, \eta \in (0, 1)$. Entonces

$$\|\overline{\xi}_i - \overline{x}\| \leq \|\overline{y} - \overline{x}\| \qquad y \qquad \|\overline{\eta}_i - \overline{x}\| \leq \|\overline{y} - \overline{x}\|.$$

Demostración. (i) Notamos que, por hipótesis, ya se cumple que $\overline{x}_2 = \overline{y} \in B_r(\overline{x})$ y también $\overline{y}_2 = \overline{x} \in B_r(\overline{x})$. Así que nos enfocaremos en demostrar que $\overline{x}_1 \in B_r(\overline{x})$ y que $\overline{y}_1 \in B_r(\overline{x})$. Para ello, probaremos que

$$\|\overline{x}_1 - \overline{x}\| < r,$$

y también

$$\|\overline{y}_1 - \overline{x}\| < r.$$

Para esto, en el primer caso notamos que

$$\begin{aligned}
\|\overline{x}_1 - \overline{x}\| &= \|(y_1, x_2) - (x_1, x_2)\| \\
&= \|(y_1 - x_1, x_2 - x_2)\| \\
&= \|(y_1 - x_1, 0)\| \\
&= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + 0^2} \\
&= |y_1 - x_1| \\
&\leq \|(y_1 - x_1, y_2 - x_2)\| \\
&= \|(y_1, y_2) - (x_1, x_2)\| \\
&= \|\overline{y} - \overline{x}\|
\end{aligned}$$

donde la desigualdad se obtiene porque para todo vector $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $|z_i| \leq \|\overline{z}\|$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ (vea el **Lema 3** de la **Ayudantía 02**). Ahora, como $\overline{y} \in B_r(\overline{x})$, se cumple que

$$\|\overline{y} - \overline{x}\| < r.$$

Al combinar las dos desigualdades anteriores se concluye que

$$\|\overline{x}_1 - \overline{x}\| < r,$$

de donde se obtiene que $\overline{x}_1 \in B_r(\overline{x})$. Notamos que de manera totalmente análoga se prueba que $\overline{y}_1 \in B_r(\overline{x})$.

(ii) Consideremos $\xi, \eta \in (0,1)$ fijos. En primer lugar, enfoquémonos en demostrar la desigualdad

$$\|\overline{\xi}_1 - \overline{x}\| \leq \|\overline{y} - \overline{x}\|$$

con la finalidad de encontrar patrones que nos permitan obtener las otras 3 desigualdades.

Pero tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\overline{\xi}_1 - \overline{x} &= \left(\overline{x}_{1-1} + \xi\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_{1-1}\right)\right) - \overline{x} \\
&= \overline{x}_0 + \xi\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_0\right) - \overline{x} \\
&= \overline{x} + \xi\left(\overline{x}_1 - \overline{x}\right) - \overline{x} \\
&= \xi\left(\overline{x}_1 - \overline{x}\right)
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\overline{\xi}_1 - \overline{x}\| &= \|\xi\left(\overline{x}_1 - \overline{x}\right)\| \\
&= |\xi|\,\|\overline{x}_1 - \overline{x}\| \\
&\leq |\xi|\,\|\overline{y} - \overline{x}\| \\
&\leq \|\overline{y} - \overline{x}\|
\end{aligned}$$

pues la primera desigualdad que aparece se mostró en el inciso anterior, mientras que la segunda se obtiene porque $\xi \in (0,1)$ por hipótesis. Es prueba lo deseado en este caso.

Por otro lado, notamos que

$$\begin{aligned}
\overline{\xi}_2 - \overline{x} &= \overline{x}_1 + \xi\left(\overline{x}_2 - \overline{x}_1\right) - \overline{x} \\
&= \overline{x}_1 - \overline{x} + \xi\left(\overline{y} - \overline{x}_1\right) \\
&= \left(y_1 - x_1, 0\right) + \xi\left(0, y_2 - x_2\right) \\
&= \left(y_1 - x_1, \xi\left(y_2 - x_2\right)\right),
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\|\overline{\xi}_2 - \overline{x}\|^2 &= \left(y_1 - x_1\right)^2 + \xi^2\left(y_2 - x_2\right)^2 \\
&\leq \left(y_1 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - x_2\right)^2 \\
&= \|\overline{y} - \overline{x}\|^2
\end{aligned}$$

donde la desigualdad se obtiene porque $\xi \in (0,1)$. Ahora, como la norma es no negativa, entonces al tomar raíces cuadradas en ambos lados de la desigualdad anterior se obtiene que

$$\|\overline{\xi}_2 - \overline{x}\| \leq \|\overline{y} - \overline{x}\|.$$

Esto prueba lo deseado en este caso.

A continuación, tenenmos que

$$\begin{aligned}
\overline{\eta}_1 - \overline{x} &= \left(\overline{y}_0 + \eta\left(\overline{y}_1 - \overline{y}_0\right)\right) - \overline{x} \\
&= \overline{y} + \eta\left(\overline{y}_1 - \overline{y}\right) - \overline{x} \\
&= \overline{y} - \overline{x} + \eta\left(\overline{y}_1 - \overline{y}\right) \\
&= \left(y_1 - x_1, y_2 - x_2\right) + \eta \cdot \left(\left(x_1, y_2\right) - \left(y_1, y_2\right)\right) \\
&= \left(y_1 - x_1, y_2 - x_2\right) + \eta(x_1 - y_1, 0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (y_1 - x_1, y_2 - x_2) + (\eta(x_1 - y_1), 0) \\
&= (y_1 - x_1, y_2 - x_2) + (-\eta(y_1 - x_1), 0) \\
&= ((1-\eta)(y_1 - x_1), y_2 - x_2)
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\|\overline{eta}_1 - \overline{x}\|^2 &= \| \left((1-\eta)(y_1 - x_1), y_2 - x_2\right) \|^2 \\
&= (1-\eta)^2 (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \\
&\leq (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \\
&= \|\overline{y} - \overline{x}\|^2
\end{aligned}
$$

y la desigualdad anterior se verifica porque $\eta \in (0,1)$, lo cual implica que $0 < 1 - \eta < 1$, y por ello $(1-\eta)^2 \leq 1$. A partir de la desigualdad anterior se sigue que

$$
\|\overline{\eta}_1 - \overline{x}\| \leq \|\overline{y} - \overline{x}\|.
$$

Para concluir este ejercicio, demostremos la desigualdad restante. Para esto, observamos que

$$
\begin{aligned}
\overline{\eta}_2 - \overline{x} &= (\overline{y}_1 + \eta(\overline{y}_2 - \overline{y}_1)) - \overline{x} \\
&= \overline{y}_1 - \overline{x} + \eta(\overline{x} - \overline{y}_1) \\
&= (x_1, y_2) - (x_1, x_2) + \eta\left((x_1, x_2) - (x_1, y_2)\right) \\
&= (0, y_2 - x_2) + (0, -\eta(y_2 - x_2)) \\
&= \left(0, (1-\eta)(y_2 - x_2)\right).
\end{aligned}
$$

Así, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\|\overline{\eta}_2 - \overline{x}\| &= \| \left(0, (1-\eta)(y_2 - x_2)\right) \| \\
&= |(1-\eta)|\,|y_2 - x_2| \\
&\leq |y_2 - x_2| \\
&\leq \|(y_1 - x_1, (y_2 - x_2))\| \\
&= \|\overline{y} - \overline{x}\|
\end{aligned}
$$

donde la segunda igualdad se obtiene después de hacer las reducciones necesarias, la primera desigualdad se cumple porque $\eta \in (0,1)$, y la segunda se obtiene por el resultado mencionado en la prueba del inciso (i). Esto concluye la prueba. ■

Observación. Note que en el problema anterior no fue necesario hacer ningún dibujo que representara la situación, sino que únicamente se hizo uso de las propiedades de la norma. Sin embargo, es siempre una buena idea tratar de representar la situación descrita en cada problema, ¿cómo lo haría si tenemos $n \geq 4$ dimensiones?