Ayudantía 04
Interior, exterior y frontera de conjuntos de $\mathbb{R}^n$

En esta sesión pondremos a prueba nuestra *intuición* con el manejo de los conceptos de interior, exterior y frontera de un conjunto de $\mathbb{R}^n$. Para ello comenzamos con algunos hechos que serán útiles más adelante en el curso.

Lema 1. *Sean A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Se cumple que*

(i). *Si $A \subset B$, entonces* $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B)$ *y* $\operatorname{ext}(B) \subseteq \operatorname{ext}(A)$.

(ii). $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subset \operatorname{int}(A \cup B)$.

(iii). $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

(iv). $\operatorname{ext}(A \cup B) = \operatorname{ext}(A) \cap \operatorname{ext}(B)$.

(v). $\operatorname{ext}(A) \cup \operatorname{ext}(B) \subset \operatorname{ext}(A \cap B)$.

(vi). $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subseteq \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$.

Demostración. (i) Tomemos $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $\operatorname{int}(A) = \varnothing$, entonces $\operatorname{int}(A) \subset \operatorname{int}(B)$. Ahora, supongamos que $\operatorname{int}(A) \neq \varnothing$ y tomemos $\overline{x} \in \operatorname{int}(A)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subseteq A$, y como $A \subseteq B$, entonces $B_r(\overline{x}) \subseteq B$, es decir, $\overline{x} \in \operatorname{int}(B)$. Esto prueba que $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B)$.

Por otro lado, si $\operatorname{ext}(B) = \varnothing$, entonces $\operatorname{ext}(B) \subset \operatorname{ext}(A)$. Ahora, supongamos que $\operatorname{ext}(B) \neq \varnothing$. Tomemos $\overline{x} \in \operatorname{ext}(B)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B$, y ya que $A \subseteq B$, se tiene que $\mathbb{R}^n \setminus B \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$, esto es, $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, o bien, $x \in \operatorname{ext}(A)$. Por lo tanto, $\operatorname{ext}(B) \subseteq \operatorname{ext}(A)$.

(ii) Como $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, se sigue que $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$ e $\operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$ en virtud del inciso (i) anterior. De aquí,

$$\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B) \cup \operatorname{int}(A \cup B) = \operatorname{int}(A \cup B).$$

(iii) Ya que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, se tiene que $\operatorname{int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{int}(A)$ e $\operatorname{int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{int}(B)$ en virtud del inciso (i) anterior. Por lo tanto,

$$\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A \cap B) \cap \operatorname{int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B).$$

Por otro lado, si $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) = \varnothing$, entonces $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cap B)$. A continuación, supongamos que $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) \neq \varnothing$. Sea $\overline{x} \in \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$, entonces existen r_A, $r_B > 0$ tales que $B_{r_A}(\overline{x}) \subseteq A$ y $B_{r_B}(\overline{x}) \subseteq B$, respectivamente. Tomemos $r = \min\{r_A, r_B\}$, entonces

$$B_r(\overline{x}) = B_{r_A}(\overline{x}) \cap B_{r_B}(\overline{x}),$$

por lo cual

$$B_r(\overline{x}) \subseteq A \cap B,$$

es decir, $\overline{x} \in \operatorname{int}(A \cap B)$. Por esto, $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cap B)$.

Las dos contenciones anteriores demuestran que $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

(iv) En virtud del inciso **(5)** de la **Proposición 3** de la **Clase 04**, de las leyes de De Morgan y del inciso (iii) anterior, tenemos que

$$\operatorname{ext}(A \cup B) = \operatorname{int}\left((A \cup B)^{\mathsf{C}}\right) = \operatorname{int}\left(A^{\mathsf{C}} \cap B^{\mathsf{C}}\right) = \operatorname{int}\left(A^{\mathsf{C}}\right) \cap \operatorname{int}\left(B^{\mathsf{C}}\right) = \operatorname{ext}(A) \cap \operatorname{ext}(B).$$

(v) Ya que por el inciso **(5)** de la **Proposición 3** de la **Clase 04** se cumple que $\operatorname{ext}(C) = \int(C^{\complement})$, y por las leyes de De Morgan se tiene que $A^{\complement} \cap B^{\complement} = (A \cup B)^{\complement}$, este resultado es una aplicación directa del inciso (ii).

(vi) Haremos la prueba por contrapositiva, esto es, veremos que si $\overline{x} \notin (\operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B))$ entonces $\overline{x} \notin \operatorname{Fr}(A \cup B)$.

Así, supongamos que $\overline{x} \notin (\operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B))$, es decir, $\overline{x} \notin \operatorname{Fr}(A)$ y $\overline{x} \notin \operatorname{Fr}(B)$. Lo anterior implica que

$$\overline{x} \in (\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{ext}(A)) \text{ y } \overline{x} \in (\operatorname{int}(B) \cup \operatorname{ext}(B))$$

Notamos que si $\overline{x} \in \operatorname{int}(A)$, entonces existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(\overline{x}) \subset A$, es decir, $B_{r_0}(\overline{x}) \cap A^{\complement} = \varnothing$, de donde se sigue que $B_{r_0}(\overline{x}) \cap A^{\complement} \cap B^{\complement} = \varnothing$, o de manera equivalente

$$B_{r_0}(\overline{x}) \cap (A \cup B)^{\complement} = \varnothing$$

en virtud de las leyes de De Morgan. Pero esto implica que $\overline{x} \notin \operatorname{Fr}(A \cup B)$. Similarmente si $\overline{x} \in \operatorname{int}(B)$.

Entonces debe cumplirse que $\overline{x} \in \operatorname{ext}(A)$ y $\overline{x} \in \operatorname{ext}(B)$, es decir,

$$\overline{x} \in \operatorname{ext}(A) \cap \operatorname{ext}(B) = \operatorname{ext}(A \cup B)$$

y por lo tanto, $\overline{x} \notin \operatorname{Fr}(A \cup B)$.

Así, se concluye que $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subseteq \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$. ∎

A partir del resultado anterior uno puede preguntarse por las contenciones opuestas a las que aparecen en los incisos (ii), (v) y (vi), así como por el comportamiento de la frontera respecto a intersecciones. Dichas preguntas las respondemos a continuación.

Ejemplo 2. (i). Si consideramos $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ y $B = [b, c)$ con $a < b < c$, entonces $\operatorname{int}(A \cup B) = (a, c)$, $\operatorname{int}(A) = (a, b)$ y también $\operatorname{int}(B) = (b, c)$, por lo cual $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) = (a, b) \cup (b, c)$. Esto muestra que $\operatorname{int}(A \cup B) \not\subset \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$.

(ii). Sean A y B como en el inciso anterior. Basta tomar $C = \mathbb{R} \setminus A$ y $D = \mathbb{R} \setminus B$, para obtener que $\operatorname{ext}(A \cap B) \not\subset \operatorname{ext}(A) \cup \operatorname{ext}(B)$.

(iii). Con los mismos conjuntos A y B del primer inciso, tenemos que $\operatorname{Fr}(A) = \{a, b\}$ y $\operatorname{Fr}(B) = \{b, c\}$, pero $\operatorname{Fr}(A \cup B) = \{a, c\}$, por lo cual $\operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B) \not\subset \operatorname{Fr}(A \cup B)$.

(iv). Notamos que $\operatorname{Fr}(A) \cap \operatorname{Fr}(B) = \{b\}$, mientras que $\operatorname{Fr}(A \cap B) = \operatorname{Fr}(\varnothing) = \varnothing$, así que $\operatorname{Fr}(A) \cap \operatorname{Fr}(B) \not\subset \operatorname{Fr}(A \cap B)$.

(v). Ahora, tomemos $E = [a, b]$ y $F = [c, d]$ con $a < c < b < d$. Entonces, $\operatorname{Fr}(E) = \{a, b\}$, $\operatorname{Fr}(F) = \{c, d\}$ y $\operatorname{Fr}(E \cap F) = \{b, c\}$, de donde se sigue que $\operatorname{Fr}(E \cap F) \not\subset \operatorname{Fr}(E) \cap \operatorname{Fr}(F)$.

(vi). Es importante notar que si $P = [m, n]$ y $Q = [r, s]$ con $m < r < s < n$, entonces $Q \subset P$, pero $\operatorname{Fr}(Q) \not\subset \operatorname{Fr}(P)$.

Ejercicio 3. *Sean $r > 0$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $A = B_r(\overline{x})$, entonces*

(i). $B = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\overline{y} - \overline{x}\| > r\} \subset \operatorname{ext}(A)$.

(ii). $C = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\overline{y} - \overline{x}\| = r\} \subset \operatorname{Fr}(A)$.

(iii). Las contenciones anteriores son igualdades.

Demostración. (i) Sea $\overline{y} \in B$. Tenemos que $\overline{y} \in A^{\complement}$ por definición de A. Tomemos $\delta < \|\overline{y} - \overline{x}\| - r$ y veamos que $B_\delta(\overline{y}) \subset A^{\complement}$. Si $\overline{z} \in B_\delta(\overline{y})$, entonces $\|\overline{z} - \overline{y}\| < \|\overline{y} - \overline{x}\| - r$, de donde $r < \|\overline{x} - \overline{y}\| - \|\overline{z} - \overline{y}\| \leq \|\overline{x} - \overline{z}\| = \|\overline{z} - \overline{x}\|$, y por lo tanto $\overline{z} \notin A$. Esto prueba lo deseado.

(ii) Sea $\overline{y} \in C$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Veamos que $B_\varepsilon(\overline{y}) \cap A \neq \varnothing \neq B_\varepsilon(\overline{y}) \cap A^{\complement}$. Consideremos $\delta = \min\{r, \varepsilon\}$. Sea $\overline{z}_1 = \overline{x} + \frac{r - \frac{\delta}{2}}{r}(\overline{y} - \overline{x})$. Como $r > \frac{\delta}{2} > 0$, se tiene que $0 < \frac{r-\frac{\delta}{2}}{r} < 1$. Tenemos que $\overline{z}_1 \in B_r(\overline{x}) = A$ porque

$$\|\overline{z}_1 - \overline{x}\| = \|\frac{r - \frac{\delta}{2}}{r}(\overline{y} - \overline{x})\| = \frac{r - \frac{\delta}{2}}{r}\|\overline{y} - \overline{x}\| < \|\overline{y} - \overline{x}\| = r.$$

También, $\overline{z}_1 \in B_\varepsilon(\overline{y})$ ya que

$$\begin{aligned}\|\overline{z}_1 - \overline{y}\| &= \|\overline{x} + \frac{r - \frac{\delta}{2}}{r}(\overline{y} - \overline{x}) - \overline{y}\| = \|\overline{x} - \overline{y} + \frac{r - \frac{\delta}{2}}{r}(\overline{y} - \overline{x})\| \\ &= \|(1 - \frac{r - \frac{\delta}{2}}{r})(\overline{x} - \overline{y})\| = (\frac{r - \frac{\delta}{2}}{r})\|\overline{x} - \overline{y}\| = \frac{\frac{\delta}{2}}{r}r = \frac{\delta}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{z}_1 \in A \cap B_\varepsilon(\overline{y})$. Análogamente se demuestra que $\overline{z}_2 = \overline{x} + \frac{r+\frac{\delta}{2}}{r}(\overline{y} - \overline{x})$ cumple que $\overline{z}_2 \in A^{\complement} \cap B_\varepsilon(\overline{y})$. En conclusión, $C \subset \mathrm{Fr}(A)$.

(iii) En primer lugar, supongamos $\overline{y} \in \mathrm{ext}(A)$. Entonces $\overline{y} \in \mathrm{int}(A^{\complement})$ y por tanto $\overline{y} \in A^{\complement}$, por lo cual $\|\overline{y} - \overline{x}\| \geq r$. Por contradicción, supongamos que $\|\overline{y} - \overline{x}\| = r$. Por (ii), $\overline{y} \in \mathrm{Fr}(A)$, pero esto es una contradicción pues $\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{ext}(A) = \varnothing$. Por lo tanto, $\mathrm{ext}(A) \subset B$.

Ahora, supongamos que $\overline{y} \notin C$, entonces $\|\overline{y} - \overline{x}\| \neq r$. Si $\|\overline{y} - \overline{x}\| < r$, entonces $\overline{y} \in \mathrm{int}(A)$ y por lo tanto $\overline{y} \notin \mathrm{Fr}(A)$ porque $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$. Análogamente, si $\|\overline{y} - \overline{x}\| > r$, por (i), $\overline{y} \in \mathrm{ext}(A)$ y ello también implica que $\overline{y} \notin \mathrm{Fr}(A)$. Por lo tanto, $\mathrm{Fr}(A) \subset C$. ∎