Última actualización: 28 de febrero de 2022

Ayudantía 05

Ejemplo de un conjunto cerrado y un conjunto abierto

Ejercicio 1 *Sea $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x \leq 0 \text{ y } y = 0\}$. Demuestre que el conjunto A es abierto.*

Demostración. Sea $(x, y) \in A$. Entonces $x > 0$ o $y \neq 0$.

Si $x > 0$, consideremos el número positivo $r = \dfrac{x}{2}$. Así, si $(u, v) \in B_r(x, y)$, entonces

$$|x - u| \leq \|(x, y) - (u, v)\| < r = \frac{x}{2},$$

de donde

$$-\frac{x}{2} < x - u < \frac{x}{2}.$$

De la desigualdad del lado derecho obtenemos que $0 < \dfrac{x}{2} < u$ y de aquí que $u > 0$. Por lo tanto, $(u, v) \in A$. Entonces, $B_r(x, y) \subseteq A$, vea figura 1.

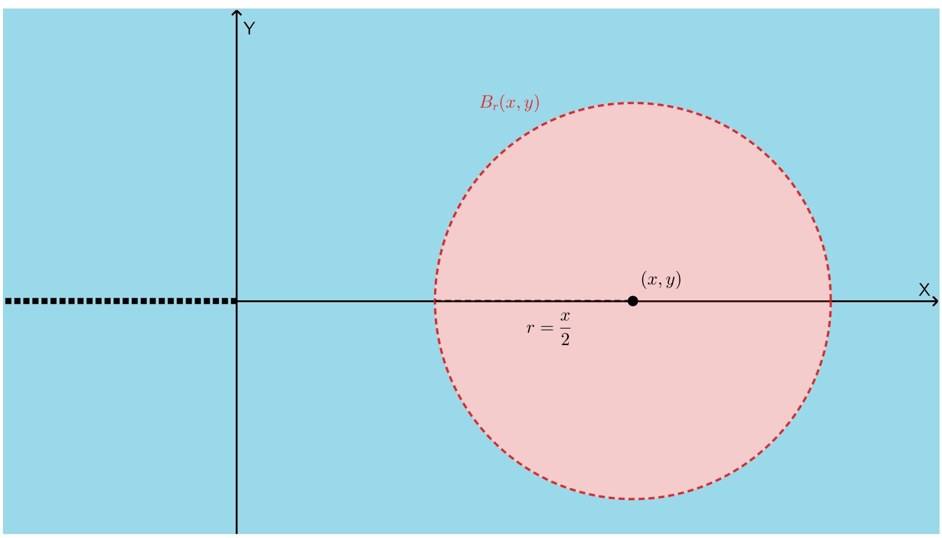

Figura 1: Cuando $x > 0$, basta considerar $r = \dfrac{x}{2}$ para garantizar que $B_r(x, y) \subseteq A$.

Ahora, si $y \neq 0$, consideremos el número positivo $r = \dfrac{|y|}{2}$. Así, si $(u, v) \in B_r(x, y)$, entonces

$$|y| - |v| \leq |y - v| \leq \|(x, y) - (u, v)\| < r = \frac{|y|}{2},$$

de donde

$$0 < \frac{|y|}{2} < |v|.$$

Entonces, $v \neq 0$. Por lo tanto, $(u, v) \in A$. Luego, $B_r(x, y) \subseteq A$, vea figura 2

Hemos demostrado que cualquier punto de A es un punto interior de A, por lo que el conjunto A es un conjunto abierto. ■

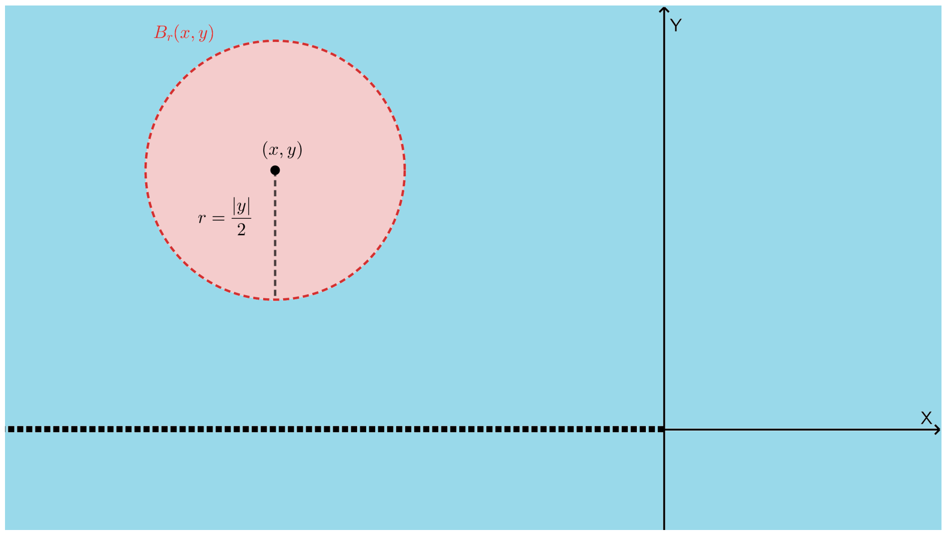

Figura 2: Cuando $y \neq 0$, basta considerar $r = \dfrac{|y|}{2}$ para garantizar que $B_r(x,y) \subseteq A$.

Ejercicio 2 *Sea* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \text{ y } y = 0\}$*. Demuestre que* $B = \mathrm{Fr}(B)$*.*

Demostración. $\subseteq]$ Sean $(x,y) \in B$ (es decir, $x \leq 0$ y $y = 0$) y $r > 0$. Claramente $(x,y) \in B_r(x,y) \cap B$, por lo que $B_r(x,y) \cap B \neq \varnothing$. Ahora, consideremos el punto $(x, r/2) \in \mathbb{R}^2$. Note que

$$\|(x,y) - (x,r/2)\| = \|(x,0) - (x,r/2)\| = \|(0,-r/2)\| = \frac{r}{2} < r.$$

Así, $(x,r/2) \in B_r(x,y)$. Ahora, como $r/2 \neq 0$, se tiene que $(x,r/2) \notin B$. Se sigue que, $(x,r/2) \in B_r(x,y) \cap B^c$ y luego $B_r(x,y) \cap B^c \neq \varnothing$. Por lo tanto $(x,y) \in \mathrm{Fr}(B)$.

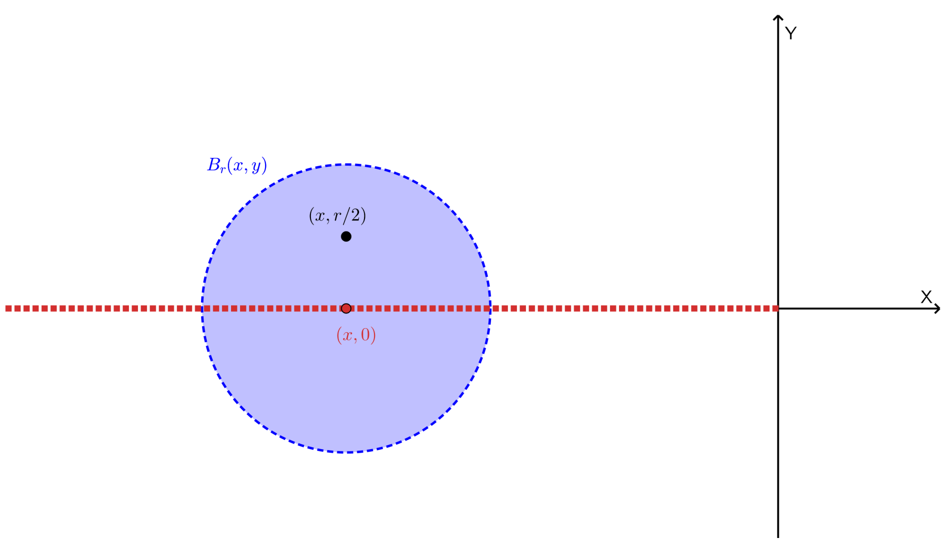

Figura 3: Para cualquier $r > 0$ se cumple que $B_r(x,y) \cap B \neq \varnothing$ y $B_r(x,y) \cap B^c \neq \varnothing$.

$\supseteq]$ Sea $(x,y) \in \mathrm{Fr}(B)$. Note que si $(x,y) \notin B$, entonces $x > 0$ o bien $y \neq 0$.

En el primer caso, es decir, si $x > 0$, consideremos el número positivo $r = \dfrac{x}{2}$. Note que si $(u, v) \in B_r(x, y)$, entonces

$$|x - u| \leq \|(x, y) - (u, v)\| < r = \frac{x}{2},$$

de donde

$$-\frac{x}{2} < x - u < \frac{x}{2}.$$

Se sigue, de la desigualdad del lado derecho, que $0 < \dfrac{x}{2} < u$ y de aquí que $u > 0$. Así, $(u, v) \notin B$. Entonces, $B_r(x, y) \subseteq B^c$ o de manera equivalente $B_r(x, y) \cap B = \varnothing$. Pero note que esto no puede ocurrir, pues $(x, y) \in \operatorname{Fr}(B)$.

Ahora, si $y \neq 0$, consideremos el número positivo $r = \dfrac{|y|}{2}$. Así, si $(u, v) \in B_r(x, y)$, entonces

$$|y| - |v| \leq |y - v| \leq \|(x, y) - (u, v)\| < r = \frac{|y|}{2},$$

de donde

$$0 < \frac{|y|}{2} < |v|.$$

Así, $v \neq 0$. Por lo tanto, $(u, v) \notin B$. Luego, $B_r(x, y) \subseteq B^c$, es decir, $B_r(x, y) \cap B = \varnothing$, lo cual no puede ocurrir, pues $(x, y) \in \operatorname{Fr}(B)$.

Concluimos entonces que $(x, y) \in B$ y así $\operatorname{Fr}(B) \subseteq B$. ■

Ejercicio 3 *Use el ejercicio anterior para proporcionar otra demostración de que el conjunto* $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \,|\, x \leq 0 \text{ y } y = 0\}$ *es abierto.*

Demostración. Note que

$$\begin{aligned} A \text{ es abierto} &\iff \operatorname{Fr}(A) \cap A = \varnothing \\ &\iff \operatorname{Fr}(A) \subseteq A^c \\ &\iff \operatorname{Fr}(A^c) \subseteq A^c \\ &\iff A^c \text{ es cerrado} \end{aligned}$$

Por otro lado, $A^c = B$, donde B es el conjunto del ejercicio anterior. Ahora, como ya vimos que B es cerrado, se sigue que A es un conjunto abierto. ■

El Ejercicio 3 tenía dos intenciones, la primera era hacerles notar (aunque posiblemente ya lo habían hecho) que un conjunto es abierto si y sólo si su complemento es cerrado. La segunda era recordarles que en las demostraciones hay más de una manera de proceder.

El siguiente ejercicio es posible recordarlo con la frase: *los conjuntos cerrados tienen fronteras "flacas".*

Ejercicio 4 *Si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *es cerrado, entonces* $\operatorname{int}(\operatorname{Fr}(A)) = \varnothing$.

Demostración. Supongamos que A es un conjunto cerrado y que $\operatorname{int}(\operatorname{Fr}(A)) \neq \varnothing$. Entonces, sea $\overline{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{Fr}(A))$. Se tiene que, existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subseteq \operatorname{Fr}(A)$, pero por ser A cerrado $\operatorname{Fr}(A) \subseteq A$, de donde $B_r(\overline{x}) \subseteq A$. Así, $\overline{x} \in \operatorname{int}(A)$. Por otro lado, como $\operatorname{int}(\operatorname{Fr}(A)) \subseteq \operatorname{Fr}(A)$, se tiene que $\overline{x} \in \operatorname{Fr}(A)$. Luego, $\overline{x} \in \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{Fr}(A)$, lo que es un absurdo, pues $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{Fr}(A) = \varnothing$. Así, $\operatorname{int}(\operatorname{Fr}(A)) = \varnothing$. ■