Ayudantía 06
Producto de conjuntos. Puntos de acumulación.

Ejercicio 1. *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $B \subseteq \mathbb{R}^m$. *Si* $A \times B = \{(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} \,|\, \overline{x} \in A, \, \overline{y} \in B\}$, *entonces:*

(i). si A *y* B *son conjuntos abiertos (en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$*, respectivamente), entonces* $A \times B$ *es abierto (en* $\mathbb{R}^{n+m}$*).*

(ii). si A *y* B *son conjuntos cerrados (en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$*, respectivamente), entonces* $A \times B$ *es cerrado (en* $\mathbb{R}^{n+m}$*).*

(iii). si A *y* B *son conjuntos acotados (en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$*, respectivamente), entonces* $A \times B$ *es acotado (en* $\mathbb{R}^{n+m}$*).*

Demostración. (i) Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y que $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Por un lado, si $A = \varnothing$, entonces $A \times B = \varnothing$ y, similarmente si $B = \varnothing$ se tiene que $A \times B = \varnothing$, por lo cual, en estos casos, $A \times B = \varnothing$ es un conjunto abierto.

A continuación, supongamos que $A \neq \varnothing \neq B$. Sea $\hat{u} = (\overline{x}, \overline{y}) \in A \times B$. Demostraremos que existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{u}) \subseteq A \times B$. Como A y B son abiertos, existen $r_1, r_2 > 0$ tales que $B_{r_1}(\overline{x}) \subseteq A$ y $B_{r_2}(\overline{y}) \subseteq B$. Consideremos $r = \min\{r_1, r_2\}$.

Afirmación. Se cumple que $B_r(u) \subseteq A \times B$.

Para demostrar la Afirmación, sea $\hat{v} = (\overline{w}, \overline{z}) \in B_r(u)$. Tenemos que

$$\|(\overline{w}, \overline{0}) - (\overline{x}, \overline{0})\| \leq \|(\overline{w}, \overline{z}) - (\overline{x}, \overline{y})\| = \|\hat{v} - \hat{u}\| < r$$

al aplicar la desigualdad del triángulo, pero notamos que

$$\|\overline{w} - \overline{x}\|^{(n)} = \|(\overline{w}, \overline{0}) - (\overline{x}, \overline{0})\|$$

donde $\|\cdot\|^{(n)}$ denota la norma en $\mathbb{R}^n$, y esto implica que

$$\|\overline{w} - \overline{x}\|^{(n)} < r \leq r_1,$$

es decir, $\overline{w} \in B_{r_1}(\overline{x}) \subseteq A$. Así, $\overline{w} \in A$. De manera similar obtenemos que $\overline{z} \in B$ (verifique las cuentas). Lo anterior muestra que $\hat{v} \in A \times B$. Por lo tanto, $B_r(\hat{u}) \subseteq A \times B$.

(ii) Si $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$, entonces $A \times B = \varnothing$, y en este caso, $A \times B$ es un conjunto cerrado. Así, supongamos que $A \neq \varnothing \neq B$. Para demostrar que $A \times B$ es cerrado, veremos que $(A \times B)^{\complement}$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+m}$.

Sea $\hat{u} = (\overline{x}, \overline{y}) \in (A \times B)^{\complement}$. Entonces $\overline{x} \notin A$ o $\overline{y} \notin B$. Para la prueba, supongamos que $\overline{x} \notin A$, pues el análisis es el mismo en caso de que $\overline{y} \notin B$. Como $A^{\complement}$ es un conjunto abierto porque A es un conjunto cerrado, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\overline{x}) \subseteq A^{\complement}$. Luego, por el inciso (i), tenemos que $B_\delta(\overline{x}) \times \mathbb{R}^m$ es un conjunto abierto, y además $B_\delta(\overline{x}) \times \mathbb{R}^m \subseteq (A \times B)^{\complement}$ porque para cualquier $(\overline{w}, \overline{z}) \in B_\delta(\overline{x}) \times \mathbb{R}^m$ se cumple que $\overline{w} \notin A$. A partir de lo anterior, para $\hat{u} = (\overline{x}, \overline{y}) \in B_\delta(\overline{x}) \times \mathbb{R}^m$ existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{u}) \subseteq B_\delta(\overline{x}) \times \mathbb{R}^m \subseteq (A \times B)^{\complement}$. En conclusión, $(A \times B)^{\complement}$ es abierto. De aquí se sigue que $A \times B$ es un conjunto cerrado.

((iii)) Como A y B son conjuntos acotados, existen $M, N > 0$ tales que $\|\overline{x}\| \leq M$ si $\overline{x} \in A$ y $\|\overline{y}\| \leq N$ si $\overline{y} \in B$. Definimos $L = M + N > 0$. Notemos que si $(\overline{x}, \overline{y}) \in A \times B$, entonces

$$\|(\overline{x}, \overline{y})\| \leq \|(\overline{x}, \overline{0})\| + \|(\overline{0}, \overline{y})\|$$

por la desigualdad del triángulo.

Ahora, ya que $\|\overline{x}\|^{(n)} = \|(\overline{x}, \overline{0})\|$ y $\|\overline{y}\|^{(m)} = \|(\overline{0}, \overline{y})\|$, por las hipótesis se tiene que

$$\|(\overline{x}, \overline{y})\| \leq M + N = L.$$

Esto prueba lo deseado. ∎

Lema 2. *Sean A, $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Se cumple que*

(i). Si $A \subseteq B$, entonces $A' \subseteq B'$.

(ii). $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

(iii). $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

Demostración. (i) Si $A' = \varnothing$ es inmediato que $A' \subseteq B'$. Supongamos que $A' \neq \varnothing$ y sea $\overline{x} \in A'$. Tomemos $r > 0$. Por definición, tenemos que $\dot{B}_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$, y como $A \subseteq B$, se sigue que $\dot{B}_r(x) \cap B \neq \varnothing$ porque $\dot{B}_r(\overline{x}) \cap A \subseteq \dot{B}_r(\overline{x}) \cap B$. Así, por definición, $\overline{x} \in B'$. En conclusión, $A' \subseteq B'$. Esto prueba lo deseado.

(ii) Ya que $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, a partir del inciso (i) anterior se obtiene que $A' \subseteq (A \cup B)'$ y también $B' \subseteq (A \cup B)'$, de donde $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.

Por otro lado, para demostrar que $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$, lo haremos por contrapositiva: demostraremos que $(A' \cup B')^{\complement} \subseteq \big((A \cup B)'\big)^{\complement}$. Para esto, consideremos $\overline{x} \notin A' \cup B'$, entonces $\overline{x} \notin A'$ y $\overline{x} \notin B'$, lo cual implica que existen r_1, $r_2 > 0$ tales que $\dot{B}_{r_1}(\overline{x}) \cap A = \varnothing$ y $\dot{B}_{r_2}(\overline{x}) \cap B = \varnothing$. Consideremos $r = \text{mín}\{r_1, r_2\}$. Entonces

$$\dot{B}_r(\overline{x}) \subseteq \dot{B}_{r_1}(\overline{x}) \ \text{ y } \ \dot{B}_r(\overline{x}) \subseteq \dot{B}_{r_2}(\overline{x}),$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \dot{B}_r(\overline{x}) \bigcap (A \cup B) &= \big(\dot{B}_r \cap A\big) \bigcup \big(\dot{B}_r(\overline{x}) \cap B\big) \\ &\subseteq \big(\dot{B}_{r_1}(\overline{x}) \cap A\big) \bigcup \big(\dot{B}_{r_2}(\overline{x}) \cap B\big) \\ &= \varnothing \cup \varnothing \\ &\varnothing \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\dot{B}_r(\overline{x}) \cap (A \cap B) = \varnothing$. Así, por definición, $\overline{x} \notin (A \cup B)'$, es decir, $(A' \cup B')^{\complement} \subseteq \big((A \cup B)'\big)^{\complement}$. Por lo tanto, $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$.

(iii) Ya que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, a partir del inciso (i) se obtiene que $(A \cap B)' \subseteq A'$ y también $(A \cap B)' \subseteq B'$, lo cual implica que, al tomar intersecciones, $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$. Esto prueba lo deseado. ∎

Observación 3. La contención $A' \cap B' \subseteq (A \cap B)'$ es FALSA en general. Para mostrarlo, consideremos $A = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ y $B = (b, c) \subseteq \mathbb{R}$ con $a < b < c$: entonces $A \cap B = \varnothing$, por lo cual $(A \cap B)' = \varnothing$, pero $A' = [a, b]$ y $B' = [b, c]$ de donde $A' \cap B' = \{b\} \neq \varnothing$.