**Ayudantía 07**
**Puntos de acumulación, cerradura y Teorema de Bolzano-Weierstrass**

**Lema 1.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Se cumplen las siguientes propiedades:*

*(i).* $\overline{x} \in \overline{A}$ *si y sólo si para toda* $r > 0$ *se tiene que* $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$.

*(ii).* $A$ *es cerrado si y sólo si* $A = \overline{A}$.

*(iii).* $A$ *es cerrado si y sólo si* $A' \subset A$.

*(iv).* $A \cup A' = \overline{A}$.

*(v).* $\left(\overline{A}\right)^{\complement} = \operatorname{ext}(A)$.

*(vi).* $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$ *y* $\overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{A}$.

*(vii).* $\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^{\complement}}$.

*Demostración.* (i) Probemos la primera implicación, para ello consideremos $\overline{x} \in \overline{A}$. Sea $r > 0$. Tenemos que $\overline{x} \in A \cup \operatorname{Fr}(A)$. Si $\overline{x} \in A$, entonces $\overline{x} \in B_r(\overline{x}) \cap A$ y concluimos. Ahora, si $\overline{x} \in \operatorname{Fr}(A)$, por definición se cumple que $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$. Así, en cualquiera de los casos obtenemos que $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$.

Para la otra contención, sea $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y supongamos que para toda $r > 0$ se cumple que $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$. Si $\overline{x} \in A$, terminamos. Supongamos que $\overline{x} \notin A$. Entonces, para toda $r > 0$ se cumple que $B_r(\overline{x}) \cap A^{\complement} \neq \varnothing$ (pues $\overline{x} \in A^{\complement}$). Como por hipótesis se tiene que $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$, por definición se cumple que $x \in \operatorname{Fr}(A)$. En cualquiera de los casos se tiene que $\overline{x} \in A \cup \operatorname{Fr} A = \overline{A}$.

(ii) Si $A$ es cerrado, entonces $\operatorname{Fr}(A) \subset A$ (vea la **Proposición 5** de la **Clase 05**), por lo cual $\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr}(A) = A$. Recíprocamente, si $\overline{A} = A$, entonces $\operatorname{Fr}(A) \subset A$, lo que implica que $A$ es cerrado (por la proposición antes mencionada).

(iii) Como $A$ es cerrado, por el inciso (ii) anterior se cumple que $\overline{A} = A$. A continuación, recordamos que $A' \subseteq \operatorname{int}(A) \cup A = \overline{A}$ (por la **Proposición 3** de la **Clase 06**), de donde por la igualdad mencionada al principio obtenemos que $A' \subset \overline{A} = A$, lo que prueba una inclusión.

Para demostrar la otra contención procederemos por contrarrecíproca: supongamos que $A$ no es cerrado y demostremos que $A' \notin A$. Por la hipótesis mencionada obtenemos que $\operatorname{Fr}(A) \notin A$ (vea la **Proposición 5** de la **Clase 05**), por lo cual existe $\overline{x} \in \operatorname{Fr}(A)$ tal que $\overline{x} \notin A$. Luego, para toda $r > 0$, $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$ y, como $\overline{x} \notin A$, de hecho se cumple que $\dot{B}(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$. Lo anterior significa que $\overline{x} \in A'$ y $\overline{x} \notin A$, es decir, $A' \notin A$. Esto prueba lo deseado.

(iv) Nuevamente, por la **Proposición 3** de la **Clase 06** sabemos que $A' \subset A \cup \operatorname{Fr}(A) = \overline{A}$, de donde se obtiene que $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

Para la otra contención, tomemos $\overline{x} \in \overline{A}$. Si $\overline{x} \in A$, terminamos. En caso contrario, tenemos que $\overline{x} \notin A$. Ya que $\overline{x} \in \overline{A}$, por el inciso (i) se cumple que para toda $r > 0$ se tiene que $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$ y, como $\overline{x} \notin A$, entonces para toda $r > 0$ se cumple que $\dot{B}_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$, lo cual implica que $\overline{x} \in A'$. Lo anterior significa que $\overline{x} \in A \cup A'$, esto es, $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

(v) Demostremos que $\left(\overline{A}\right)^{\complement} \subseteq \operatorname{ext}(A)$. Si $\overline{x} \in \left(\overline{A}\right)^{\complement}$, entonces existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(\overline{x}) \cap A = \varnothing$ (en virtud del inciso (i)), lo cual implica que $B_{r_0}(\overline{x}) \subset A^{\complement}$. Así, por definición se tiene que $\overline{x} \in \operatorname{ext}(A)$.

A continuación veamos que $\operatorname{ext} A \subseteq \left(\overline{A}\right)^{\mathsf{C}}$. Si $\overline{x} \in \operatorname{ext}(A)$, entonces existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(\overline{x}) \subset A^{\mathsf{C}}$, esto es, $B_{r_0}(\overline{x}) \cap A = \varnothing$, lo que, por el inciso (i) anterior, implica que $\overline{x} \notin \overline{A}$, es decir, $\overline{x} \in \left(\overline{A}\right)^{\mathsf{C}}$. Por lo tanto, $\operatorname{ext} A \subseteq \left(\overline{A}\right)^{\mathsf{C}}$.

(vi) Ya que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado (ver la **Proposición 10** de la **Clase 05**), por el inciso (ii) se cumple que $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

A continuación, como $\operatorname{int}(A) \subset A$ por definición de interior de un conjunto, por el **Lema 1** de la **Ayudantía 04** se obtiene que $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) \subset \operatorname{int}(A)$. Por otro lado, si $\overline{x} \in \operatorname{int}(A)$, existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subset A$. Como $\overline{x} \in \operatorname{int}(A) \cap B_r(\overline{x})$ y $B_r(\overline{x}) \cap \operatorname{int}(A)$ es abierto (¿por qué?), entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\overline{x}) \subset \operatorname{int}(A) \cap B_r(\overline{x}) \subset \operatorname{int}(A)$, por lo cual $\overline{x} \in \operatorname{int}(\operatorname{int}(A))$. Se sigue que $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{int}(A))$. En conclusión, $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$.

(vii) Se sigue inmediatamente del inciso (i). ∎

**Lema 2.** *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Se cumple que:*

*(i). Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

*(ii). $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

*(iii). $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.*

*Demostración.* ((i)) Se sigue inmediatamente del inciso (i) anterior: si una bola abierta interseca a $A$, como $A \subseteq B$, tenemos que también interseca a $B$.

((ii)) Tenemos que

$$\overline{A \cup B} = (A \cup B) \cup (A \cup B)' = A \cup B \cup A' \cup B' = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

donde la segunda igualdad se obtiene a partir del **Lema 2** de la **Ayudantía 04**.

((iii)) Ya que $A \cap B \subset A, B$, el inciso (i) anterior implica que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. ∎

**Observación.** Note que la contención recíproca al inciso (iii) es **falsa**. Para verlo, consideremos $A = (a, b)$ y $B = (b, c)$ con $a < b < c$, entonces $A \cap B = \varnothing$, $\overline{A \cap B} = \varnothing$, $\overline{A} = [a, b]$, $B = [b, c]$ y $\overline{A} \cap \overline{B} = \{b\}$.

**Ejercicio 3.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A' \neq \varnothing$. Entonces para toda $\varepsilon > 0$ existen $\overline{x}, \overline{y} \in A$ tales que $0 < \|\overline{x} - \overline{y}\| < \varepsilon$.*

*Demostración.* Sea $\overline{x}_0 \in A'$. Tenemos que $\dot{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(\overline{x}_0) \cap A \neq \varnothing$ es infinito, por lo cual podemos tomar $\overline{x}, \overline{y} \in \dot{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(\overline{x}_0) \cap A$ con $\overline{x} \neq \overline{y}$ y se cumple que

$$0 < \|\overline{x} - \overline{y}\| \leq \|\overline{x} - \overline{x}_0\| + \|\overline{x}_0 - \overline{y}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

∎

**Ejercicio 4.** *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto infinito y $c > 0$. Si $\|\overline{x} - \overline{y}\| \geq c$ para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in A$, entonces $A$ es un conjunto no acotado.*

*Demostración.* Por contradicción. Supongamos que $A$ es acotado. Como $A$ es infinito, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass se tiene que $A' \neq \varnothing$. Sea $\overline{x}_0 \in A'$. Luego, para $\varepsilon = \frac{c}{2} > 0$ se cumple que $\dot{B}_\varepsilon(\overline{x}_0) \cap A$ es un conjunto infinito, así podemos tomar $\overline{w}, \overline{z} \in \dot{B}_\varepsilon(\overline{x}_0) \cap A$ con $\overline{w} \neq \overline{z}$ y por lo tanto

$$0 < \|\overline{w} - \overline{z}\| \leq \|\overline{w} - \overline{x}_0\| + \|\overline{x}_0 - \overline{z}\| < 2\varepsilon = c,$$

lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, $A$ es no acotado. ∎

**Ejercicio 5.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A' = \varnothing$. Si $M > 0$ y $A_M = \{\overline{x} \in A \,|\, \|\overline{x}\| \leq M\}$, entonces $A_M$ es finito.*

*Demostración.* Si $A_M = \varnothing$, terminamos. Supongamos que $A_M \neq \varnothing$ y procedamos por contradicción: supongamos que $A_M$ es infinito. Ya que por definición se cumple que $A_M$ es acotado, entonces por el Teorema de Bolzano–Weierstrass se sigue que $A'_M \neq \varnothing$. Ya que $A_M \subseteq A$, se obtiene que $\varnothing = A'_M \subseteq A' = \varnothing$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A_M$ es finito. ∎