Ayudantía 08
Otros sistemas coordenados (parte 1)

1. Coordenadas polares

Como ya vimos en sesiones anteriores, nuestra representación habitual del plano $\mathbb{R}^2$ admite el sistema de **coordenadas cartesianas** y es mediante dichas coordenadas que se identifica de manera unívoca a cada uno de sus puntos. Sin embargo, es posible utilizar otros sistemas, en particular, se dispone del sistema de **coordenadas polares**, las cuales se obtienen de la siguiente manera:

- Se establece un punto de origen O llamado **polo**,
- se elige una semirecta que parte del polo, y a dicha recta se le llama **eje polar**,
- cualquier punto P del plano, y que sea distinto del polo, está determinado por por una pareja de puntos r y θ, donde r corresponde a la distancia de P al polo O, y θ es la medida del ángulo dirigido formado por el eje polar y el segmento de recta que une O con P, vea la Figura 1.
- Al origen se le asigna, por convención, la pareja formada por $r = 0$ y $\theta = 0$.

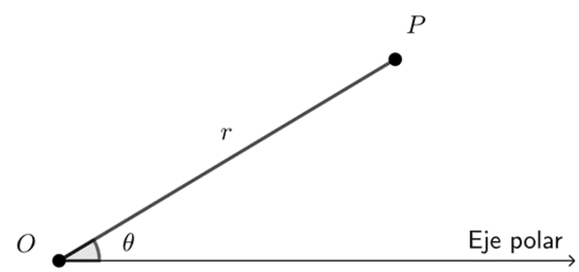

Figura 1: Definición del sistema de coordenadas polares.

Una pregunta inmediata es: ¿cómo se relacionan ambos sistemas coordenados? La pregunta anterior, tal como está formulada admite una respuesta muy amplia, y es porque ello que debemos delimitar correctamente el problema. Para esto, supongamos que el origen de un sistema coordenado cartesiano XY coincide con el polo de un sistema de coordenadas polares, y que además la parte positiva del eje X coincide con el eje polar. Bajo las condiciones anteriores, si tenemos un punto P es representado por (r, θ) en coordenadas polares, es posible realizar una transformación hacia las coordenadas cartesianas antes dichas: sabemos que las coordenadas cartesianas (x, y) del punto P se pueden obtener de la siguiente manera:

$$x = r\cos(\theta) \qquad \text{y} \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta).$$

2. Coordenadas cilíndricas

Recordemos que, dado un punto P en el espacio cuyas coordenadas son (x, y, z) en un sistema cartesiano XYZ, y que además no este en el eje Z (es decir, $x \neq 0$ y $y \neq 0$), se le pueden asociar **coordenadas cilíndicas** mediante las siguientes tres cantidades:

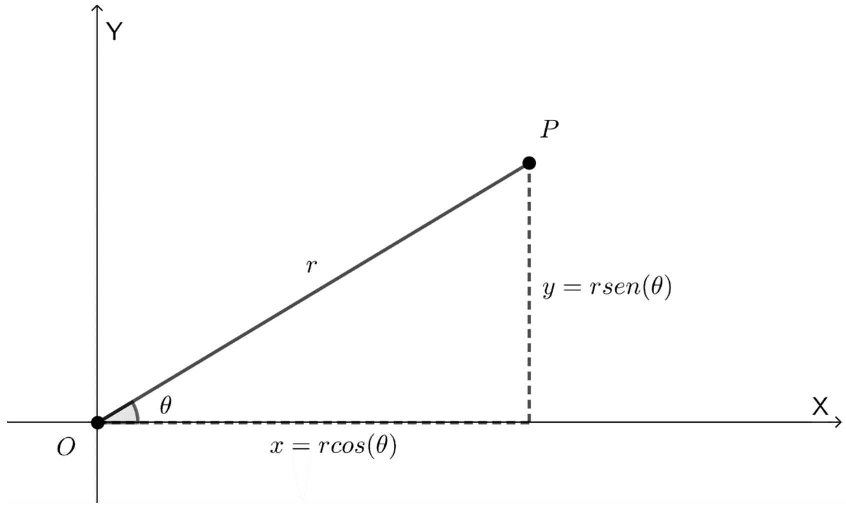

Figura 2: Cuando el origen de un sistema coordenado cartesiano coincide con el polo y la parte positiva del eje X coincide con el eje polar las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto P se pueden obtener a tráves de las coordenadas polares.

(i). r, la distancia del punto $(x, y, 0)$ (la proyección de P al plano XY) al origen del sistema XYZ, o dicho de otra manera, la primer coordenada polar del punto $(x, y, 0)$ en el plano XY.

(ii). θ, el ángulo dirigido formado por el eje X y la semirecta que pasa por el origen y el punto $(x, y, 0)$, o dicho de otra manera, la segunda coordenada polar del punto $(x, y, 0)$ en el plano XY.

(iii). z, donde z es justo la tercer coordenada del punto P en el sistema cartesiano dado (la altura), vea la Figura 3.

Finalmente, si P es un punto en el eje Z, es decir, con coordenadas $(0, 0, z)$, en correspondencia con lo que hicimos en las coordenadas polares, tendremos que sus coordenadas cilíndricas son $(0, 0, z)$.

En virtud de lo anterior, las coordenadas cartesianas (x, y, z) y las coordenas cilíndricas de un punto P están relacionadas mediante las siguientes ecuaciones:

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \qquad \text{y} \qquad z = z.$$

Note que la tercera ecuación puede parecer absurda, pero esto situación se debe al hecho de que estamos utilizando la misma letra para denotar la tercer coordenada en ambos sistemas.

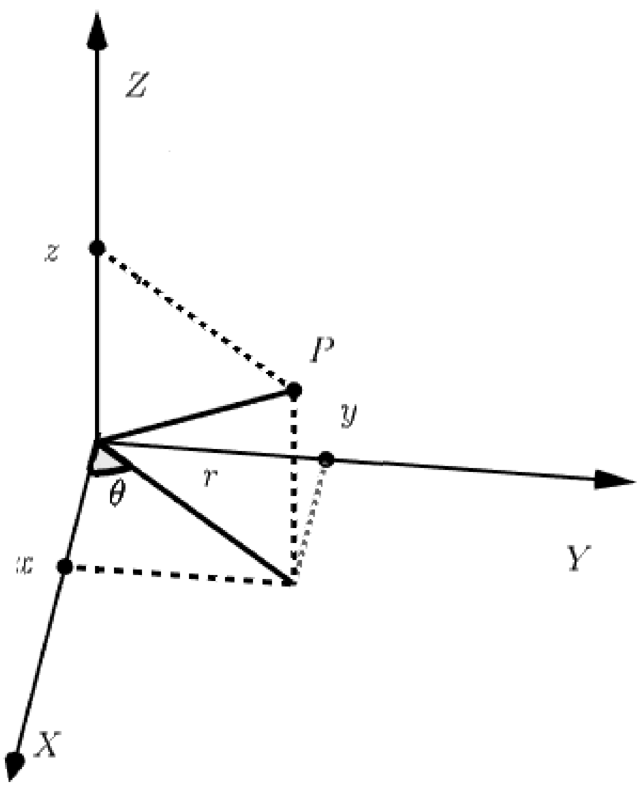

Figura 3: Coordenadas cilíndricas de un punto P.