Clase 01

Las notas que proporcionaremos a lo largo del curso están basadas, principalmente, en el libro "Cálculo diferencial en varias variables" del Dr. Javier Páez Cardenas.

Comencemos entonces este curso estudiando la estructura algebraica del conjunto $\mathbb{R}^n$, pues este será el conjunto donde nuestras funciones "tomarán" sus dominios y sus codominios.

El espacio $\mathbb{R}^n$

Definición 1 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos el conjunto $\mathbb{R}^n$ como sigue:*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Respecto a la notación, debemos comentar lo siguiente:

- Cuando no es necesario precisar las *coordenadas* de un elemento en $\mathbb{R}^n$, en lugar de escribir $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ escribiremos $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.
- La diferencia entre $\overline{x}$ y x, es que el primero de ellos es un elemento de $\mathbb{R}^n$ mientras que el segundo es un elemento de $\mathbb{R}$ (por supuesto que esto tiene sentido si $n \geq 2$, pues si $n = 1$, entonces no es necesario el uso del *gorrito*).

Definición 2 *Un* ***espacio vectorial*** *sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$ es un conjunto $V \neq \varnothing$, dotado de dos operaciones $+ : V \times V \longrightarrow V$ y $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ que satisfacen las siguientes las siguientes afirmaciones:*

(V1) Conmutatividad para la adición: Para cualesquiera $u, v \in V$ se satisface que $u + v = v + u$.

(V2) Asociatividad para la adición: Para cualesquiera $u, v, w \in V$ se satisface que $(u + v) + w = u + (v + w)$.

(V3) Neutro para la adición: Existe un elemento en V, denotado por $\boldsymbol{0}$, tal que $\boldsymbol{0} + u = u$ para todo $u \in V$.

(V4) Inverso aditivo: Para cada $u \in V$ existe un elemento $v \in V$ tal que $u + v = \boldsymbol{0}$

(V5) Para cualesquiera $r, s \in \mathbb{R}$ y $u \in V$ se satisface que $r \cdot (s \cdot u) = (rs) \cdot u$.

(V6) Para cualquier $u \in V$ se satisface que $1 \cdot u = u$.

(V7) Para cualesquiera $r \in \mathbb{R}$ y $u, v \in V$ se satisface que $r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$.

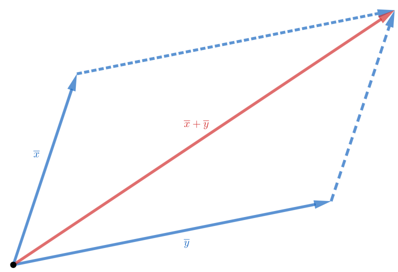
(V8) Para cualesquiera $r, s \in \mathbb{R}$ y $u \in V$ se satisface que $(r + s) \cdot u = r \cdot u + s \cdot u$.

Definición 3 *Sean $\overline{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos $\overline{x} + \overline{y}$ y $\lambda\overline{x}$, como sigue:*

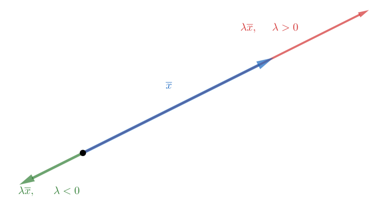
$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \qquad y \qquad \lambda\overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Proposición 4 *Con las operaciones de la Definición 3, el conjunto $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. Solo basta notar que $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ es el neutro aditivo (razón por la cual usaremos $\overline{0}$ en lugar de $\mathbf{0}$) y que el resto de propiedades son consecuencia inmediata de las propiedades de campo de los números reales. $\blacksquare$



(a) Para hallar la suma de los vectores $\overline{x}$ y $\overline{y}$ se utiliza la *ley del paralelogramo*, es decir, se completa el paralelogramo ‘trasladando los vectores $\overline{x}$ y $\overline{y}$.



(b) El producto por un número real (por un escalar) de un vector $\overline{x}$ se puede interpretar como la *extensión* o *contracción* en distinto o igual sentido dependiendo del *tamaño* ($|\lambda|$) y del *signo* de λ.

Figura 1: Las operaciones de la Definición 3 se pueden interpretar geométricamente si se piensan a los elementos (vectores) de $\mathbb{R}^n$ como *flechas* ancladas en un punto fijo llamado origen.

Continuaremos enunciando y demostrando un lema, pero para ello conviene recordar que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ es una *forma abreviada* de escribir $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, es decir, que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Lema 5 *Sean $x_1, x_2 \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Note que si $x_i = 0$, para todo i, o $y_i = 0$, para todo i, entonces ocurre la igualdad. Supongamos entonces que existen $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $x_{i_1}, y_{i_2} \neq 0$ y sea λ cualquier número real. Note que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2. \tag{1}$$

Note que la expresión en (1) es un trinomio de segundo grado en λ, por lo que el *discriminante* es no positivo, así que

$$\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leq 0.$$

De donde

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

Definición 6 *Para cada* $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *definimos* $\|\overline{x}\|$ *como sigue*

$$\|\overline{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Según la definición anterior, podemos reescribir el Lema 5, como sigue:
Sean $\overline{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n),\ \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Se cumple que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|\overline{x}\|\|\overline{y}\|.$$

Esta desigualdad es conocida como la **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**.

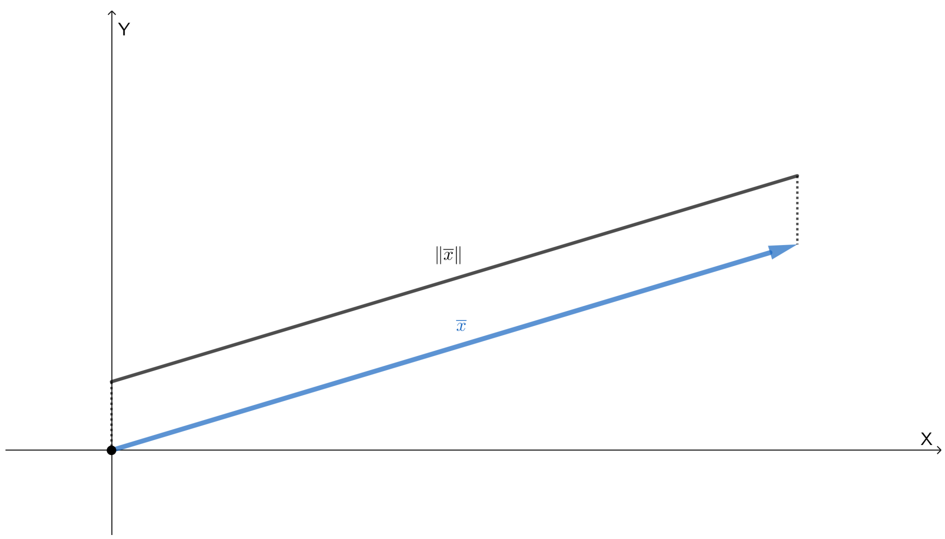


Figura 2: La norma $\|\overline{x}\|$ de un vector $\overline{x}$ se puede interpretar como la longitud del vector.

Teorema 7 *Sean* $\overline{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n),\ \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\|\overline{x}\| \geq 0$ *y* $\|\overline{x}\| = 0$ *si y sólo si* $\overline{x} = \overline{0}$.

(2) $\|\lambda\overline{x}\| = |\lambda|\|\overline{x}\|$.

(3) $\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$.

Demostración.

(1) El hecho de que $\|\overline{x}\| \geq 0$ se sigue de la definición de $\|\overline{x}\|$. Ahora, $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, lo cual ocurre si y sólo si $x_i^2 = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por lo tanto $\|\overline{x}\| = 0$ si y sólo si $\overline{x} = \overline{0}$.

(2) Se tiene que

$$\|\lambda\overline{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|\overline{x}\|.$$

(3) Note que

$$\begin{aligned}
\|\overline{x} + \overline{y}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\
&= \|\overline{x}\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \|\overline{y}\|^2 \\
&\leq \|\overline{x}\|^2 + 2\|\overline{x}\|\|\overline{y}\| + \|\overline{y}\|^2 \\
&= (\|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|)^2 .
\end{aligned}$$

Donde la desigualdad es una aplicación directa de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Así, se tiene que $\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$.

■

Definición 8 *Una norma en un espacio vectorial V sobre el campo $\mathbb{R}$ es una función $\rho : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:*

(1) $\rho(v) \geq 0$ para todo $v \in V$ y $\rho(v) = 0$ si y sólo si $v = \mathbf{0}$.

(2) $\rho(\lambda \cdot v) = |\lambda|\rho(v)$, para todo $v \in V$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) $\rho(u + v) \leq \rho(u) + \rho(v)$, para cualesquiera $u, v \in V$.

Observación 9 *La función de la Definición 6, es una norma en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Esta norma es conocida como la **norma euclidiana**.*