Última actualización: 17 de febrero de 2022

Clase 02

En cada sesión es costumbre recordar un poco de lo visto la clase anterior:

Definimos el conjunto $\mathbb{R}^n$ y un par de operaciones como sigue:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Y para $\overline{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n),\ \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{y} \quad \lambda\overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Definimos también, para cada $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la **norma euclidiana** $\|\overline{x}\|$ como

$$\|\overline{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Y demostramos **La Desigualdad de Cauchy-Schwarz**:
Para cualesquiera vectores $\overline{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n),\ \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|\overline{x}\| \|\overline{y}\|.$$

En esta ocasión continuaremos estudiando la estructura algebraica de $\mathbb{R}^n$.

Producto punto y ángulos en $\mathbb{R}^n$

Definición 1 *Sean $\overline{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n),\ \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos el **producto punto** de $\overline{x}$ con $\overline{y}$, denotado por $\overline{x} \cdot \overline{y}$, como sigue:*

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Observación 2 *Note que:*

- $\|\overline{x}\|^2 = \overline{x} \cdot \overline{x}$.
- *Con la definición anterior, podemos reescribir la desigualdad de Cauchy-Schwarz como sigue: Para cualesquiera vectores $\overline{x},\ \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que*

$$|\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq \|\overline{x}\| \|\overline{y}\|.$$

En la siguiente proposición enunciamos algunas propiedades del producto punto, pero omitimos la demostración pues todas y cada una de las propiedades son consecuencias inmediatas de la definición y de las propiedades de campo de los números reales.

Proposición 3 *Para cualesquiera* $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$ *y cualquier* $\lambda \in \mathbb{R}$ *se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\overline{x} \cdot \overline{x} \geq 0$ *y* $\overline{x} \cdot \overline{x} = 0$ *si y sólo si* $\overline{x} = \overline{0}$.

(2) $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$.

(3) $\overline{x} \cdot (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{z}$.

(4) $(\lambda \overline{x}) \cdot \overline{y} = \overline{x} \cdot (\lambda \overline{y}) = \lambda (\overline{x} \cdot \overline{y})$.

Definición 4 *Sea* V *un espacio vectorial sobre el campo de los números reales. Una función* $\langle \ , \ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *es llamada un producto interior en* V *si para cualesquiera* $u, v, w \in V$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *se satisfacen las siguientes:*

(1) $\langle u, u \rangle \geq 0$ *y* $\langle u, u \rangle = 0$ *si y sólo si* $u = \boldsymbol{0}$.

(2) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

(3) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.

(4) $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$.

Se sigue, de la Proposición 3, que el producto punto de la Definición 1 es un producto interior en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

Hagamos un pequeño paréntesis, analizando una situación en la comodidad de un plano: Consideremos un par de vectores $\overline{x}$ y $\overline{y}$ no cero en el plano como los que se muestran en la figura 1

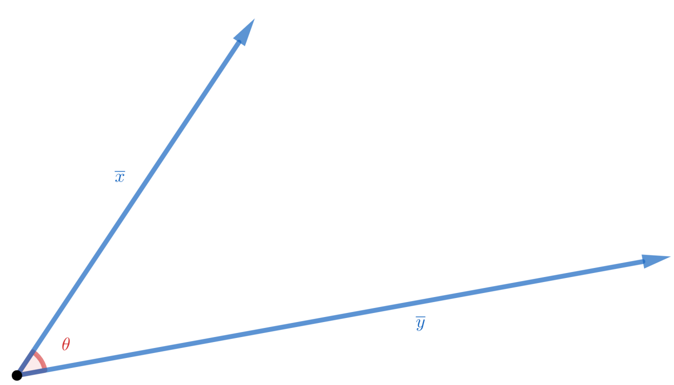


Figura 1: El ángulo θ formado por los vectores $\overline{x}$ y $\overline{y}$ en el plano.

Si quisieramos conocer el ángulo θ que forman los vectores $\overline{x}$ y $\overline{y}$, podríamos recurrir a nuestros conocimientos básicos de geometría, por ejemplo considerar un triángulo rectángulo y el Teorema de Pitagoras, vea figura 2.

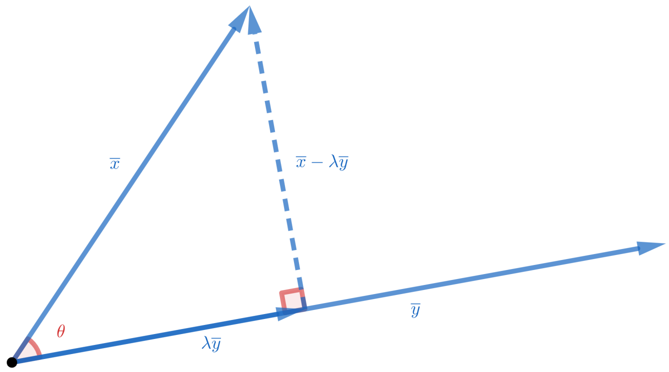


Figura 2: Según el Teorema de Pitágoras, $\|\lambda\overline{y}\|^2 + \|\overline{x} - \lambda\overline{y}\|^2 = \|\overline{x}\|^2$.

Pero, ¿quién es λ? Por un lado, λ debería cumplir que

$$\|\lambda\overline{y}\|^2 + \|\overline{x} - \lambda\overline{y}\|^2 = \|\overline{x}\|^2.$$

Pero, note que

$$\begin{aligned}
\|\lambda\overline{y}\|^2 + \|\overline{x} - \lambda\overline{y}\|^2 = \|\overline{x}\|^2 &\iff \lambda^2\|\overline{y}\|^2 + (\overline{x} - \lambda\overline{y})\cdot(\overline{x} - \lambda\overline{y}) = \|\overline{x}\|^2 \\
&\iff \lambda^2\|\overline{y}\|^2 + \|\overline{x}\|^2 - 2\lambda\overline{x}\cdot\overline{y} + \lambda^2\|\overline{y}\|^2 = \|\overline{x}\|^2 \\
&\iff 2\lambda^2\|\overline{y}\|^2 - 2\lambda\overline{x}\cdot\overline{y} = 0 \\
&\iff 2\lambda\left(\lambda\|\overline{y}\|^2 - \overline{x}\cdot\overline{y}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Lo cual ocurre si $\lambda = 0$ o $\lambda = \dfrac{\overline{x}\cdot\overline{y}}{\|\overline{y}\|^2}$. Pero, por supuesto que la única solución interesante es

$$\lambda = \frac{\overline{x}\cdot\overline{y}}{\|\overline{y}\|^2}. \tag{1}$$

Por otro lado, debería suceder que si $\lambda > 0$, entonces $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (vea figura 3a), de donde

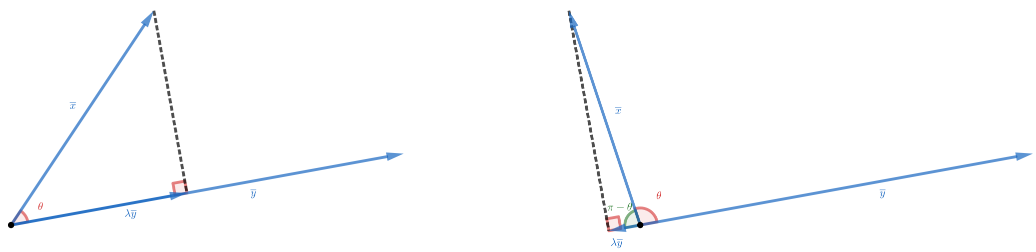
$$\cos(\theta) = \frac{\|\lambda\overline{y}\|}{\|\overline{x}\|} = \frac{|\lambda|\|\overline{y}\|}{\|\overline{x}\|} = \frac{\lambda\|\overline{y}\|}{\|\overline{x}\|}.$$

Y si $\lambda < 0$, entonces $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (vea figura 3b), por lo que

$$-\cos(\theta) = \cos(\pi - \theta) = \frac{\|\lambda\overline{y}\|}{\|\overline{x}\|} = \frac{|\lambda|\|\overline{y}\|}{\|\overline{x}\|} = \frac{-\lambda\|\overline{y}\|}{\|\overline{x}\|}.$$

En ambos casos λ debería cumplir que

$$\cos(\theta) = \frac{\lambda\|\overline{y}\|}{\|\overline{x}\|}. \tag{2}$$



(a) Si λ es positivo, entonces $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

(b) Si λ es negativo, entonces $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

Figura 3

Así, de (1) y (2), se tiene que

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\|\overline{x}\| \|\overline{y}\|}.$$

Por supuesto que todo lo anterior lo deducimos con ayuda de nuestros conocimientos de geometría básica en el plano, pero esto tiene sentido para parejas de vectores no cero en $\mathbb{R}^n$, pues tanto la norma como el producto punto están definidos en $\mathbb{R}^n$ sin importar que natural sea n.

Definición 5 *Sean* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ *dos vectores distintos de* $\overline{0} \in \mathbb{R}^n$*. Definimos el ángulo (agudo) entre* $\overline{x}$ *y* $\overline{y}$ *como el número* θ *dado por la siguiente igualdad:*

$$\theta = \arccos\left(\frac{\overline{x} \cdot \overline{y}}{\|\overline{x}\| \|\overline{y}\|}\right).$$

Donde $\arccos$ *denota la inversa de la función* $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$.