Última actualización: 18 de febrero de 2022

Clase 03

Nos conviene recordar un par de definiciones y resultados vistos en clases anteriores:

Definición 1 *Una norma en un espacio vectorial V sobre el campo $\mathbb{R}$ es una función $\rho : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:*

(1) $\rho(v) \geq 0$ para todo $v \in V$ y $\rho(v) = 0$ si y sólo si $v = \boldsymbol{0}$.

(2) $\rho(\lambda \cdot v) = |\lambda|\rho(v)$, para todo $v \in V$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) $\rho(u + v) \leq \rho(u) + \rho(v)$, para cualesquiera $u, v \in V$ (Desigualdad del Triángulo).

Definición 2 *Para cada $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos la* ***norma euclidiana*** *de $\overline{x}$, denotada por $\|\overline{x}\|$, como $\|\overline{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.*

Definición 3 *Sean $\overline{x} = (x_1, x_2 \dots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos el* ***producto punto*** *de $\overline{x}$ con $\overline{y}$, denotado por $\overline{x} \cdot \overline{y}$, como $\overline{x} \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.*

Lema 4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Para cualesquiera vectores $\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $|\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq \|\overline{x}\|\|\overline{y}\|$.*

En esta clase introduciremos un par de normas, distintas a la norma euclidiana. Además introduciremos un concepto primordial en cálculo, la distancia.

Otras normas y distancia en $\mathbb{R}^n$

Definición 5 *Para cada $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos:*

(1) ***La norma uno*** *de $\overline{x}$, denotada por $\|\overline{x}\|_1$, como*

$$\|\overline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

(2) ***La norma infinito*** *de $\overline{x}$, denotada por $\|\overline{x}\|_\infty$, como*

$$\|\overline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Como podrán notar, en la definición anterior, nos adelantamos en el uso de la palabra *norma*. Formalmente, no deberíamos usar esa palabra hasta demostrar que las funciones definidas (implícitamente) son, en efecto, normas. Pero, nos permitiremos esto, pues en la siguiente ayudantía mostrarán que lo son.

Una pregunta natural es si las normas euclidiana, uno e infinito son en realidad diferentes. Para responder esta pregunta basta calcular dichas normas para un mismo vector.

Ejemplo 6 *Sea* $\overline{x} = (-1, 2, -3) \in \mathbb{R}^3$. *Calcule* $\|\overline{x}\|$, $\|\overline{x}\|_1$ *y* $\|\overline{x}\|_\infty$.

Solución. Se tiene que

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14},$$

$$\|\overline{x}\|_1 = |-1| + |2| + |-3| = 1 + 2 + 3 = 6$$

y

$$\|\overline{x}\|_\infty = \max\{|-1|, |2|, |-3|\} = \max\{1, 2, 3\} = 3.$$

Así que las tres normas de $\overline{x}$ son distintas. ■

¿Estas normas tendrán alguna relación? La respuesta la proporciona la siguiente proposición.

Proposición 7 *Para cualquier elemento* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *se cumplen las siguientes desigualdades:*

(1) $\|\overline{x}\|_\infty \leq \|\overline{x}\| \leq \sqrt{n}\|\overline{x}\|_\infty$.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|\overline{x}\|_1 \leq \|\overline{x}\| \leq \|\overline{x}\|_1$.

Demostración. Sea $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(1) Note que $x_i^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De aquí que

$$|x_i| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\overline{x}\|,$$

para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ahora, como $\|\overline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$, se sigue que

$$\|\overline{x}\|_\infty \leq \|\overline{x}\|. \tag{1}$$

Por otro lado, como $|x_i| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = \|\overline{x}\|_\infty$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene que $x_i^2 = |x_i|^2 \leq \|\overline{x}\|_\infty^2$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq n\|\overline{x}\|_\infty^2$, de donde

$$\|\overline{x}\| \leq \sqrt{n}\|\overline{x}\|_\infty. \tag{2}$$

Por lo tanto, de (1) y (2), concluimos que

$$\|\overline{x}\|_\infty \leq \|\overline{x}\| \leq \sqrt{n}\|\overline{x}\|_\infty.$$

(2) Para mostrar que $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|\overline{x}\|_1 \leq \|\overline{x}\|$, mostraremos que $\|\overline{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\overline{x}\|$ utilizando la desigualdad de Cauchy Schwarz (Lema 4). Para ello, consideremos los vectores $(1, 1, \ldots, 1), (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) \in \mathbb{R}^n$. Se sigue, por la desigualdad de Cauchy Schwarz, que

$$|(1, 1, \ldots, 1) \cdot (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)| \leq \|(1, 1, \ldots, 1), \|\| \left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right) \|$$

es decir,

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esto es,

$$\|\overline{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\overline{x}\|. \tag{3}$$

Para la otra desigualdad, note que $\overline{x} = (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, x_n)$, así que (usando la desigualdad del Triángulo)

$$\begin{aligned}
\|\overline{x}\| &= \|(x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, x_n)\| \\
&\leq \|(x_1, 0, \ldots, 0)\| + \|(0, x_2, 0, \ldots, 0)\| + \cdots + \|(0, 0, \ldots, x_n)\| \\
&= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\
&= \|\overline{x}\|_1.
\end{aligned}$$

Es decir

$$\|\overline{x}\| \leq \|\overline{x}\|_1. \tag{4}$$

Así, de (3) y (4), se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\overline{x}\|_1 \leq \|\overline{x}\| \leq \|\overline{x}\|_1.$$

■

En la clase anterior observamos que $\|\overline{x}\|^2 = \overline{x} \cdot \overline{x}$, o de manera equivalente, que $\|\overline{x}\| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}}$, es decir, que la norma euclidiana es inducida por el producto punto. Entonces, podemos preguntarnos si existen productos interiores en $\mathbb{R}^n$ que induzcan las normas *uno* e *infinito*. Ustedes, ¿qué creen? Una pista: Una norma $\rho : V \longrightarrow \mathbb{R}$, en un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, es inducida por un producto interior si y sólo si satisface la identidad del paralelogramo: $\frac{1}{2}\left([\rho(u+v)]^2 + [\rho(u-v)]^2\right) = [\rho(u)]^2 + [\rho(v)]^2$, para cualesquiera $u, v \in V$.

Continuamos este documento definiendo la "distancia" euclidiana.

Definición 8 *Para cada par de elementos $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$, definimos* ***la "distancia" euclidiana*** *de $\overline{x}$ a $\overline{y}$, denotada por $d(\overline{x}, \overline{y})$, como*

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \|\overline{x} - \overline{y}\|.$$

A continuación enunciamos una proposición cuya demostración omitimos por ser inmediata de las propiedades de norma (en particular de la euclidiana).

Proposición 9 *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $d(\overline{x}, \overline{y}) \geq 0$, para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$, y $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ si y sólo si $\overline{x} = \overline{y}$.

(2) $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{y}, \overline{x})$, para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$.

(3) $d(\overline{x}, \overline{y}) \leq d(\overline{x}, \overline{z}) + d(\overline{z}, \overline{y})$, para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$ (Desigualdad del Triángulo).

Definición 10 *Una función $\Delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada distancia si satisface:*

(1) $\Delta(\overline{x}, \overline{y}) \geq 0$, para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$, y $\Delta(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ si y sólo si $\overline{x} = \overline{y}$.

(2) $\Delta(\overline{x}, \overline{y}) = \Delta(\overline{y}, \overline{x})$, para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$.

(3) $\Delta(\overline{x},\overline{y}) \leq \Delta(\overline{x},\overline{z}) + \Delta(\overline{z},\overline{y})$, *para cualesquiera* $\overline{x},\overline{y},\overline{z} \in \mathbb{R}^n$ *(Desigualdad del Triángulo).*

Ahora sí, según la Proposición 9, ya podemos escribir sin comillas *distancia euclidiana*.

Ya que definimos la *distancia euclidiana* en términos de la norma euclidiana, ¿podemos definir una *distancia uno* y una *distancia infinito*? La respuesta es sí, además, de la misma manera, es decir, para $\overline{x},\overline{y} \in \mathbb{R}^n$, $d_1(\overline{x},\overline{y}) = \|\overline{x}-\overline{y}\|_1$ y $d_\infty(\overline{x},\overline{y}) = \|\overline{x}-\overline{y}\|_\infty$. Pero, ¿qué diferencia hay entre estas distancias? Bueno, nada más como ejemplo, consideremos, con $n = 2$, los conjuntos $A = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\overline{x},\overline{0}) = 1\}$, $B = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\overline{x},\overline{0})_1 = 1\}$ y $C = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\overline{x},\overline{0})_\infty = 1\}$ que se muestran en la figura 1.

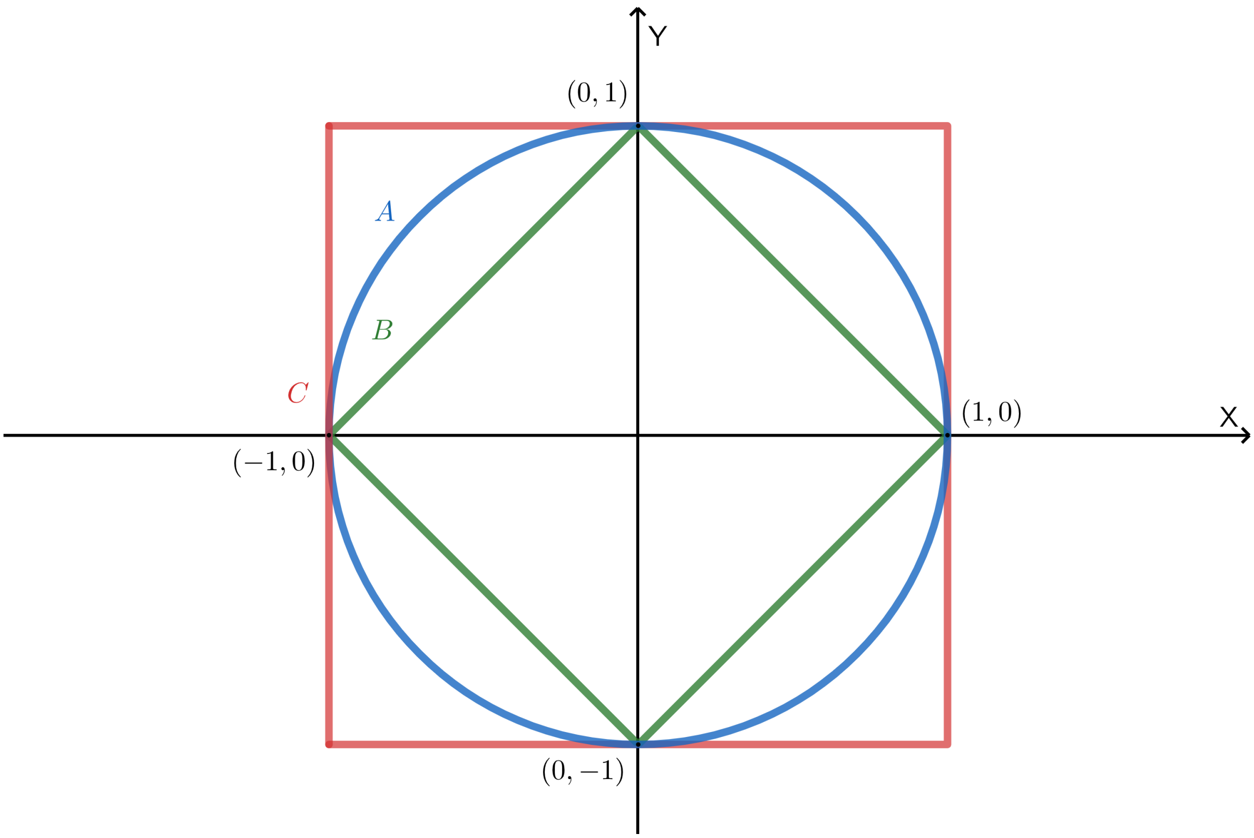

Figura 1: Se muestran los conjuntos A, B y C.