Última actualización: 22 de febrero de 2022

Clase 04

¿Ha escuchado la frase *los topólogos toman café en su dona*? Bien, pues pensemos que la taza es de un material maleable, como plastilina por ejemplo, entonces "es posible" transformar la taza en una dona sin obtener más ni menos agujeros (sin romper la plastilina pues) y al revés también, "es posible" transformar la dona en una taza de café sin obtener más ni menos agujeros. Dicho de manera muy superficial, esto es lo que estudia la topología, objetos con algunas propiedades que permanecen "sin alteración" bajo ciertas "transformaciones". Y ¿qué tiene esto que ver con nuestro curso? Bueno, pensemos en dos puntos cercanos en la taza, ¿qué ocurre con ellos cuando transformamos la taza en una dona? ¿Pueden "alejarse" mucho? Al revés, si consideramos dos puntos cercanos en la dona, ¿qué ocurre con ellos al transformar la dona en una taza? Como ven, en mente está el concepto de "cercanía", así como cuando estudiamos continuidad en Cálculo 1. En dicho curso decíamos que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ se podía leer así: *puntos cercanos a c bajo la función f van a dar a puntos cercanos a $f(c)$*. En este curso también nos interesa estudiar continuidad, límites de funciones en general, pero funciones que tienen su dominio en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces debemos entender qué significado tiene "cercanía" en $\mathbb{R}^n$, entre otras cosas. Así que en esta sesión comenzamos con el estudio de la topología de $\mathbb{R}^n$.

Topología de $\mathbb{R}^n$: interior, exterior y frontera

Comenzaremos recordando que todos los conjuntos que estudiaremos en este curso son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ (para algún $n \in \mathbb{N}$), así que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, escribimos A^c para referirnos al complemento de A respecto a $\mathbb{R}^n$, es decir, $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$.

Definición 1 *Dado un elemento $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y un número $r > 0$, definimos la bola (o vecindad) de radio r con centro en $\overline{x}$, denotada por $B_r(\overline{x})$, como*

$$B_r(\overline{x}) = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\overline{x}, \overline{y}) = \|\overline{x} - \overline{y}\| < r\}.$$

Definición 2 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Diremos que:*

(1) $\overline{x}$ es un ***punto interior*** *de A si existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subseteq A$. Al conjunto formado por todos los puntos interiores de A lo llamaremos* ***el interior*** *de A y lo denotaremos por $\mathrm{int}(A)$, es decir,*

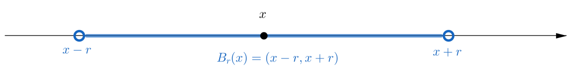
$$\mathrm{int}(A) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overline{x} \textit{ es un punto interior de } A\}.$$

(2) $\overline{x}$ es un ***punto exterior*** *de A si existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subseteq A^c$. Al conjunto formado por todos los puntos exteriores de A lo llamamos* ***el exterior*** *de A y lo denotaremos por $\mathrm{ext}(A)$, esto es*

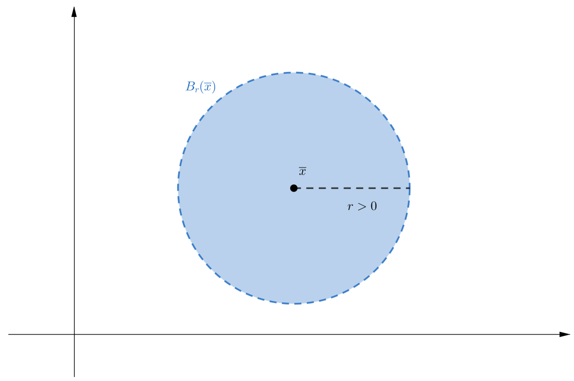
$$\mathrm{ext}(A) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overline{x} \textit{ es un punto exterior de } A\}.$$

(3) $\overline{x}$ es un ***punto frontera*** *de A si para todo $r > 0$ se tiene que $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$ y $B_r(\overline{x}) \cap A^c \neq \varnothing$. Al conjunto de todos los puntos frontera de A lo denotamos por $\mathrm{Fr}(A)$ y lo llamamos* ***la frontera*** *de A, es decir,*

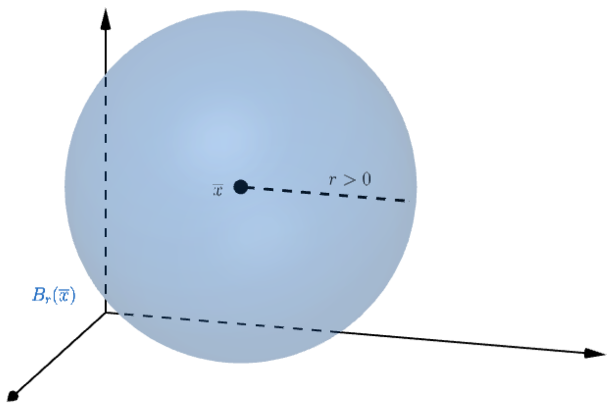
$$\mathrm{Fr}(A) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overline{x} \textit{ es un punto frontera de } A\}.$$



(a) Se muestra una bola en $\mathbb{R}$



(b) Se muestra una bola en $\mathbb{R}^2$



(c) Se muestra una bola en $\mathbb{R}^3$

Figura 1

En la siguiente proposición enunciamos unas afirmaciones que se siguen directamente de la definición de interior, exterior y frontera de un conjunto, razón por la cual no incluimos la demostración (pero los invitamos a proporcionar una demostración, recuerden que todo esfuerzo será tomado en cuenta).

Proposición 3 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\operatorname{int}(A) \subseteq A$.

(2) $\operatorname{ext}(A) \subseteq A^c$.

(3) $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{ext}(A) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Fr}(A) \cap \operatorname{ext}(A) = \varnothing$.

(4) $\mathbb{R}^n = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{ext}(A)$.

(5) $\operatorname{int}(A^c) = \operatorname{ext}(A)$ *y* $\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Fr}(A^c)$.

Debemos mencionar que en la práctica los conjuntos no tienen por que ser "tan bonitos" como el de la figura 1. El siguiente ejemplo es una muestra de ello.

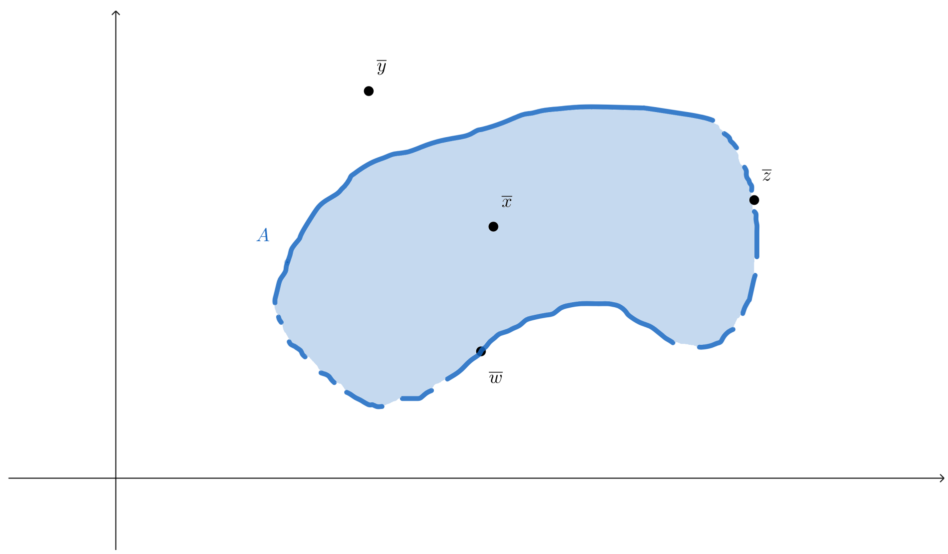


Figura 2: Se muestra un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w} \in \mathbb{R}^2$, donde $\overline{x}$ es un punto interior de A, $\overline{y}$ es un punto exterior de A y tanto $\overline{z}$ como $\overline{w}$ son puntos frontera de A.

Ejemplo 4 *Sea* $A = ([0,1] \times [0,1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q} \text{ y } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. *Demuestre que:*

(1) $\operatorname{int}(A) = \varnothing$.

(2) $\operatorname{Fr}(A) = [0,1] \times [0,1]$.

(3) $\operatorname{ext}(A) = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [0,1])$.

Demostración.

(1) Mostraremos que ningún elemento de $\mathbb{R}^2$ puede ser punto interior de A. Para ello, veremos que, para cualquier $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ y cualquier $r > 0$, se tiene que $B_r(\overline{x}) \cap A^c \neq \varnothing$.

Sea $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Consideremos $s \in (x_1, x_1 + r) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, es decir, un número irracional s que cumple $x_1 < s < x_1 + r$ (¿por qué existe un número con dichas características?). Luego, si $\overline{y} = (s, x_2)$, se tiene que $\overline{y} \notin A$, además

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \|\overline{x} - \overline{y}\| = |x_1 - s| < r.$$

Así que $\overline{y} \in B_r(\overline{x}) \cap A^c$, es decir $B_r(\overline{x}) \cap A^c \neq \varnothing$. Así, $\operatorname{int}(A) = \varnothing$.

(2) Veamos primero que $[0,1] \times [0,1] \subseteq \operatorname{Fr}(A)$. Para ello consideremos $r > 0$ y $\overline{x} = (x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1]$. En el inciso anterior vimos que $B_r(\overline{x}) \cap A^c \neq \varnothing$ (de hecho, vimos que ocurría para cualquier $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$), por lo que solo resta demostrar que $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$.

Supongamos primero que $0 \leq x_1 < 1$ y que $0 \leq x_2 < 1$. En este caso, elegimos $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tales que

$$x_1 < q_1 < \min\left\{1, x_1 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right\} \quad \text{y} \quad x_2 < q_2 < \min\left\{1, x_2 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right\}. \tag{1}$$

Así, si $\overline{q} = (q_1, q_2)$, entonces $\overline{q} \in A$. Ahora, como $|x_1 - q_1| < \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ y $|x_2 - q_2| < \dfrac{r}{\sqrt{2}}$, se sigue que

$$d(\overline{x}, \overline{q}) = \|\overline{x} - \overline{q}\| = \sqrt{(x_1 - q_1)^2 + (x_2 - q_2)^2} < \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2}} = r,$$

con lo que $\overline{q} \in B_r(\overline{x})$. Por lo tanto $\overline{q} \in B_r(\overline{x}) \cap A$, así que $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$.

Ahora, si $x_1 = 1$, consideremos q_2 como en (1), de esta manera es claro que $(1, q_2) \in B_r(\overline{x}) \cap A$. De manera similar, si $x_2 = 1$, elegimos q_1 como en (1), luego $(q_1, 1) \in B_r(\overline{x}) \cap A$. En ambos casos $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$.

Finalmente, si $x_1 = x_2 = 1$, entonces $\overline{x} = (1, 1) \in B_r(\overline{x}) \cap A$, es decir, $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$.

En cualquier caso, $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$ y por lo tanto $[0,1] \times [0,1] \subseteq \text{Fr}(A)$.

Ahora, antes de mostrar que $\text{Fr}(A) \subseteq [0,1] \times [0,1]$, notemos lo siguiente:

- Como ya demostramos que $\text{int}(A) = \varnothing$, por el inciso (4) de la Proposición 3, tenemos que $\mathbb{R}^n = \text{Fr}(A) \cup \text{ext}(A)$. Luego, del inciso (3) de la misma proposición, se tiene que $\text{Fr}(A) = \mathbb{R}^n \setminus \text{ext}(A)$.
- Si mostramos que $\mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [0,1]) \subseteq \text{ext}(A)$, entonces tendríamos que $\mathbb{R}^n \setminus \text{ext}(A) \subseteq ([0,1] \times [0,1])$ (recuerde la propiedad de conjuntos: $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$), es decir, que $\text{Fr}(A) \subseteq [0,1] \times [0,1]$.

Mostraremos entonces que $\mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [0,1]) \subseteq \text{ext}(A)$. Sea $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [0,1])$.

Si $x_1 < 0$, afirmamos que con $r = |x_1| > 0$ se tiene que $B_r(\overline{x}) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [0,1])$:
Si $\overline{y} = (y_1, y_2) \in B_r(\overline{x})$, entonces

$$|x_1 - y_1| \leq \|\overline{x} - \overline{y}\| < r = |x_1| = -x_1,$$

de donde $x_1 < x_1 - y_1 < -x_1$. Luego, $y_1 < 0$, por lo que $\overline{y} \notin [0,1] \times [0,1]$. Esto es, $\overline{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [0,1])$.

Ahora, si $1 < x_1$, consideremos $r = x_1 - 1 > 0$. Afirmamos que $B_r(\overline{x}) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [0,1])$:
Sea $\overline{y} = (y_1, y_2) \in B_r(\overline{x})$. Se tiene que

$$|x_1 - y_1| \leq \|\overline{x} - \overline{y}\| < r = x_1 - 1$$

y de aquí que $1 - x_1 < x_1 - y_1 < x_1 - 1$. Luego, $1 < y_1$, de donde $\overline{y} \notin [0,1] \times [0,1]$. Es decir, $\overline{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [0,1])$.

Los casos en que $x_2 < 0$ o $x_2 > 1$ son totalmente análogos a los anteriores, por lo que no los escribiremos.

Así, en cualquier caso, mostramos que existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [0,1])$, pero note que $\mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [0,1]) \subseteq A^c$ pues $A \subseteq [0,1] \times [0,1]$. Por lo tanto $\overline{x} \in \text{ext}(A)$. Así, $\text{Fr}(A) \subseteq [0,1] \times [0,1]$.

Concluimos entonces que $\text{Fr}(A) = [0,1] \times [0,1]$.

(3) Dado que $\text{int}(A) = \varnothing$ y $\text{Fr}(A) = [0,1] \times [0,1]$, por los incisos (3) y (4) de la Proposición 3, se tiene que $\text{ext}(A) = \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times [0,1])$.

$\blacksquare$