Última actualización: 23 de febrero de 2022

Clase 05

La sesión anterior introducimos las siguientes definiciones:

Definición 1 *Dado un elemento $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y un número $r > 0$, definimos la bola (o vecindad) de radio r con centro en $\overline{x}$, denotada por $B_r(\overline{x})$, como $B_r(\overline{x}) = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\overline{x}, \overline{y}) = \|\overline{x} - \overline{y}\| < r\}$.*

Definición 2 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Diremos que:*

*(1) $\overline{x}$ es un **punto interior** de A si existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subseteq A$. Al conjunto formado por todos los puntos interiores de A lo llamaremos **el interior** de A y lo denotaremos por $\operatorname{int}(A)$, es decir, $\operatorname{int}(A) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overline{x}$ es un punto interior de $A\}$.*

*(2) $\overline{x}$ es un **punto exterior** de A si existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subseteq A^c$. Al conjunto formado por todos los puntos exteriores de A lo llamamos **el exterior** de A y lo denotaremos por $\operatorname{ext}(A)$, esto es $\operatorname{ext}(A) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overline{x}$ es un punto exterior de $A\}$.*

*(3) $\overline{x}$ es un **punto frontera** de A si para todo $r > 0$ se tiene que $B_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$ y $B_r(\overline{x}) \cap A^c \neq \varnothing$. Al conjunto de todos los puntos frontera de A lo denotamos por $\operatorname{Fr}(A)$ y lo llamamos **la frontera** de A, es decir, $\operatorname{Fr}(A) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overline{x}$ es un punto frontera de $A\}$.*

Y enunciamos la siguiente proposición:

Proposición 3 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\operatorname{int}(A) \subseteq A$.

(2) $\operatorname{ext}(A) \subseteq A^c$.

(3) $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{ext}(A) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Fr}(A) \cap \operatorname{ext}(A) = \varnothing$.

(4) $\mathbb{R}^n = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{ext}(A)$.

(5) $\operatorname{int}(A^c) = \operatorname{ext}(A)$ *y* $\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Fr}(A^c)$.

En esta clase continuaremos estudiando la toplogía de $\mathbb{R}^n$, esta ocasión aprenderemos sobre *conjuntos abiertos y cerrados.*

Topología de $\mathbb{R}^n$: abiertos y cerrados

Definición 4 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que:*

*(1) A es un **conjunto abierto** si $A = \operatorname{int}(A)$.*

*(2) A es un **conjunto cerrado** si A^c es un conjunto abierto.*

Note que, por el inciso (1) de la Proposición 3, para demostar que un conjunto A es abierto es suficiente mostrar que cada elemento $\overline{x} \in A$ es un punto interior de A.

Enseguida enunciamos y demostramos una proposición que nos proporciona herramientas para demostrar que un conjunto es abierto o cerrado.

Proposición 5 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) A es un conjunto abierto si y sólo si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$.

(2) A es un conjunto cerrado si y sólo si $\mathrm{Fr}(A) \subseteq A$.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$] Por hipótesis $A = \mathrm{int}(A)$ y, por el inciso (3) de la Proposición 3, se tiene que

$$\varnothing = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{Fr}(A) = A \cap \mathrm{Fr}(A),$$

es decri, $A \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

$\Leftarrow$] Sea $\overline{x} \in A$. Como $A \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$, se tiene que $\overline{x} \notin \mathrm{Fr}(A)$. Así, existe $r_0 > 0$ de tal manera que $B_{r_0}(\overline{x}) \cap A = \varnothing$ o bien $B_{r_0}(\overline{x}) \cap A^c = \varnothing$. Pero es claro que $\overline{x} \in B_{r_0}(\overline{x}) \cap A$, por lo que debe suceder que $B_{r_0}(\overline{x}) \cap A^c = \varnothing$. Se sigue que $B_{r_0}(\overline{x}) \subseteq (A^c)^c = A$ (aquí hemos usado el hecho de que: $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B^c$), es decir, $\overline{x}$ es un punto interior de A. Concluimos que $A = \mathrm{int}(A)$, esto es, A es un conjunto abierto.

(2) Se tiene que A es un conjunto cerrado si y sólo si A^c es conjunto abierto y, por el inciso anterior, esto ocurre si y sólo si $\mathrm{Fr}(A^c) \cap A^c = \varnothing$. Ahora, por el inciso (5) de la Proposición 3, $\mathrm{Fr}(A^c) = \mathrm{Fr}(A)$. Así que A es un conjunto cerrado si y sólo si $\mathrm{Fr}(A) \cap A^c = \varnothing$, pero esto ocurre si y sólo si $\mathrm{Fr}(A) \subseteq (A^c)^c = A$. Concluimos que A es un conjunto cerrado si y sólo si $\mathrm{Fr}(A) \subseteq A$.

■

Consideremos un número real x y el conjunto $\mathbb{Q}$. Es claro que solo tenemos dos opciones respecto a la *pertenencia*, es decir $x \in \mathbb{Q}$ o $x \notin \mathbb{Q}$, pero no pueden ocurrir ambas a la vez. Es común, al inicio, pensar que el ser un conjunto abierto o cerrado funciona de manera similar, es decir que si no es abierto es cerrado y al réves, pero MUCHO CUIDADO porque esto no funciona así. Los siguientes ejemplos muestran este hecho.

Ejemplo 6 *Muestre que el conjunto $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y cerrado.*

Solución. Si $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ es claro que $B_r(\overline{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$, es decir, cualquier punto $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto interior de $\mathbb{R}^n$. Luego, R^n es un conjunto abierto.

Por otro lado, es claro que $\mathrm{Fr}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}^n$, así que, por el inciso (2) de la Proposición 5, $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado. ■

Ejemplo 7 *Muestre que $\varnothing$ es un conjunto abierto y cerrado.*

Solución. Si $\varnothing$ no fuera un conjunto abierto, entonces $\mathrm{int}(\varnothing) \neq \varnothing$, por lo que existiría un elemento $\overline{x} \in \mathrm{int}(\varnothing) \subseteq \varnothing$, lo que es un absurdo. Así, $\varnothing$ es un conjunto abierto.

Por otro lado, $\varnothing^c = \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, así que $\varnothing$ es un conjunto cerrado. ■

Ejemplo 8 *Muestre que las bolas en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos.*

Solución. Sean $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ y $\overline{y} \in B_r(\overline{x})$. Mostraremos que $\overline{y}$ es un punto interior de $B_r(\overline{x})$. Para ello, sea $r' = r - \|\overline{x} - \overline{y}\|$. Note que $r' > 0$, pues $\|\overline{x} - \overline{y}\| < r$. Veamos entonces que $B_{r'}(\overline{y}) \subseteq B_r(\overline{x})$. Sea $\overline{z} \in B_{r'}(\overline{y})$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\overline{x} - \overline{z}\| &= \|\overline{x} - \overline{y} + \overline{y} - \overline{z}\| \\
&\leq \|\overline{x} - \overline{y}\| + \|\overline{y} - \overline{z}\| \\
&< \big(r' - \|\overline{x} - \overline{y}\|\big) + \|\overline{y} - \overline{z}\| \\
&= r.
\end{aligned}$$

Así, $\overline{z} \in B_r(\overline{x})$. Por lo tanto, $B_r(\overline{x})$ es un conjunto abierto. ■

Definición 9 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la cerradura de A, denotada por $\overline{A}$, como*

$$\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A).$$

Proposición 10 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) Los conjuntos $\mathrm{int}(A)$ y $\mathrm{ext}(A)$ son conjuntos abiertos.

(2) Los conjuntos $\mathrm{Fr}(A)$ y $\overline{A}$ son conjuntos cerrados.

Demostración.

(1) Sea $\overline{x} \in \mathrm{int}(A)$. Debemos demostrar que existe $r_0 > 0$ de tal manera que $B_{r_0}(\overline{x}) \subseteq \mathrm{int}(A)$. Como $\overline{x} \in \mathrm{int}(A)$, existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(\overline{x}) \subseteq A$. Afirmamos que $B_{r_0}(\overline{x}) \subseteq \mathrm{int}(A)$:
Sean $\overline{y} \in B_{r_0}(\overline{x})$ y $r = r_0 - \|\overline{x} - \overline{y}\|$. Note que $B_r(\overline{y}) \subseteq B_{r_0}(\overline{x}) \subseteq A$, es decir $\overline{y} \in \mathrm{int}(A)$.

Para ver que $\mathrm{ext}(A)$ es un conjunto abierto solo basta recordar, por el inciso (5) de la Proposición 3, que $\mathrm{ext}(A) = \mathrm{int}(A^c)$. Como acabamos de ver que el interior de un conjunto es un conjunto abierto, se sigue que $\mathrm{ext}(A)$ es un conjunto abierto.

(2) Para ver que $\mathrm{Fr}(A)$ es un conjunto cerrado usaremos la definición, es decir, mostraremos que $(\mathrm{Fr}(A))^c$ es un conjunto abierto. Del inciso (4) de la Proposición 3, se tiene que

$$(\mathrm{Fr}(A))^c = \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Fr}(A) = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A).$$

Veamos ahora que $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A)$ es un conjunto abierto, es decir, que todo $\overline{x} \in \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A)$ es punto interior de $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A)$. Sea $\overline{x} \in \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A)$. Si $\overline{x} \in \mathrm{int}(A)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subseteq \mathrm{int}(A)$, pues $\mathrm{int}(A)$ es un conjunto abierto. Luego, $B_r(\overline{x}) \subseteq \mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A)$, es decir $\overline{x}$ es punto interior de $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A)$. Ahora, si $\overline{x} \in \mathrm{ext}(A)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subseteq \mathrm{ext}(A)$, pues $\mathrm{ext}(A)$ es un conjunto abierto. Luego, $B_r(\overline{x}) \subseteq \mathrm{ext}(A) \subseteq \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A)$, es decir, $\overline{x}$ es punto interior de $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A)$. Así, $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A)$ es un conjunto abierto (Note que esta demostración se puede copiar para demostrar que la unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto).

Veamos ahora que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado, usando la definición. Por los primeros cuatro incisos de la Proposición 3, se tiene que

$$\begin{aligned}
A &= A \cap \mathbb{R}^n \\
&= A \cap [\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{ext}(A)] \\
&= [A \cap \mathrm{int}(A)] \cup [A \cap \mathrm{Fr}(A)] \cup [A \cap \mathrm{ext}(A)] \\
&= \mathrm{int}(A) \cup [A \cap \mathrm{Fr}(A)]\,.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\overline{A} &= A \cup \mathrm{Fr}(A)\\ &= (\mathrm{int}(A) \cup [A \cap \mathrm{Fr}(A)]) \cup \mathrm{Fr}(A)\\ &= \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A).\end{aligned}$$

Así, $\overline{A}^c = [\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)]^c = \mathbb{R}^n \setminus [\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)] = \mathrm{ext}(A)$, es un conjunto abierto.

$\blacksquare$