

Clase 06

Consideremos un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. En esta clase estudiaremos una clasificación de puntos en $\mathbb{R}^n$, respecto al conjunto A , que, en general, no tiene que ver con la pertenencia al conjunto A .

Topología de $\mathbb{R}^n$: puntos de acumulación y puntos aislados

Comenzamos esta sesión introduciendo algo de terminología y de notación:

Dado $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, al conjunto $B_r(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ lo denotamos por $\dot{B}_r(\bar{x})$ y lo llamamos **la bola “agujerada”** con centro en $\bar{x}$ y radio $r > 0$.

Definición 1 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Diremos que:

- (1) $\bar{x}$ es un **punto de acumulación** de A si para todo radio $r > 0$ se tiene que $\dot{B}_r(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de todos los puntos de acumulación de A lo llamamos **el derivado** de A y lo denotaremos por A' , es decir

$$A' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} \text{ es punto de acumulación de } A\}$$

- (2) $\bar{x}$ es un **punto aislado** de A si $\bar{x} \in A$, pero no es un punto de acumulación de A , es decir, si existe $r > 0$ tal que $\dot{B}_r(\bar{x}) \cap A = \emptyset$.

Podemos notar que los puntos aislados, por definición, siempre pertenecen al conjunto en cuestión, mientras que los puntos de acumulación de un conjunto pueden o no pertenecer al conjunto, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Sea $A = B_1(0,0) \cup \{(2,2)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Exhiba:

- (1) Un punto de acumulación de A que pertenezca a A .
(2) Un punto de acumulación de A que no pertenezca a A .
(3) Un punto aislado de A .

Solución.

- (1) $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de acumulación de A que pertenece a A : Sean $r > 0$ y $0 < x < \min\{1, r\}$. Note que

$$0 < \|(0,0) - (x,0)\| < r,$$

por lo que $(x,0) \in \dot{B}_r(0,0) \cap \dot{B}_1(0,0) \subseteq \dot{B}_r(0,0) \cap A$. De aquí que $\dot{B}_r(0,0) \cap A \neq \emptyset$, para cualquier $r > 0$, vea figura 1.

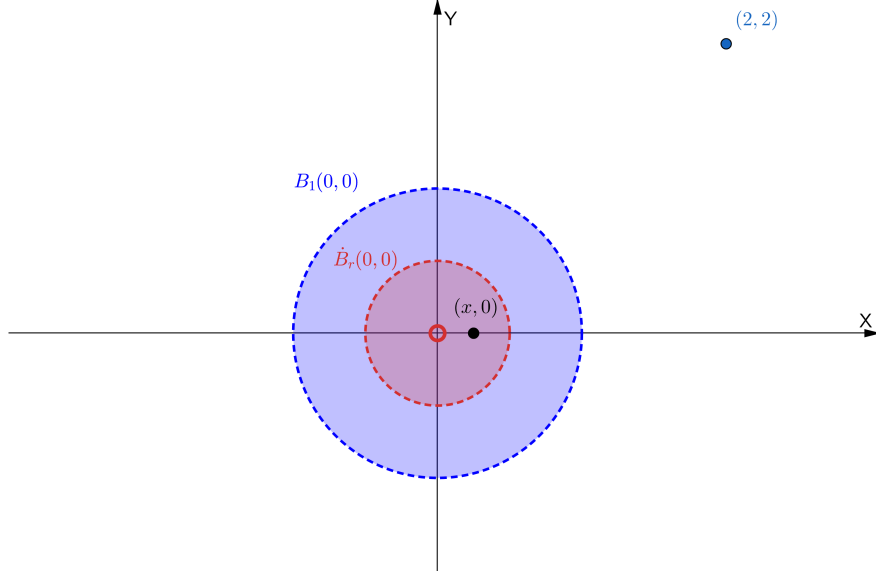


Figura 1: Para cualquier $r > 0$ exhibimos un punto $(x, 0) \in \dot{B}_r(0, 0) \cap A$, por lo que $\dot{B}_r(0, 0) \cap A \neq \emptyset$.

- (2) Afirmamos que $(-1, 0)$ es un punto de acumulación de A que no pertenece a A : Sean $r > 0$ y $0 < x < \min\{1, r\}$. Se tiene que

$$0 < \|(-1, 0) - (-1 + x, 0)\| = \|(-x, 0)\| < r,$$

de donde $(-1 + x, 0) \in \dot{B}_r(-1, 0)$. Por otro lado,

$$\|(0, 0) - (-1 + x, 0)\| = |1 - x| < 1,$$

de donde $(-1 + x, 0) \in B_1(0, 0) \subseteq A$. Así que, $(-1 + x, 0) \in \dot{B}_r(-1, 0) \cap A$. Con lo que $(-1 + x, 0)$ es un punto de acumulación de A . Finalmente, $\|(-1, 0) - (0, 0)\| = 1$ y claramente $(-1, 0) \neq (2, 2)$, por lo que $(-1, 0) \notin A$, vea figura 2.

- (3) $(2, 2) \in A$ es punto aislado de A : Sean $r = 1/2$ y $(x, y) \in \dot{B}_r(2, 2)$. Entonces

$$\|(2, 2)\| - \|(x, y)\| \leq \|(2, 2) - (x, y)\| < r = \frac{1}{2},$$

de donde $\sqrt{8} - \frac{1}{2} < \|(x, y)\|$, es decir, $1 < \|(x, y)\|$. Así, $(x, y) \notin B_1(0, 0)$. Y como $(x, y) \in \dot{B}_r(2, 2)$, en particular $(x, y) \neq (2, 2)$. Así, $\dot{B}_r(2, 2) \cap A = \emptyset$, esto es, $(2, 2)$ es un punto aislado de A , vea figura 3.

■

Note lo siguiente, respecto a la solución del ejemplo anterior:

- En el primer inciso, el punto $(0, 0)$ se puede reemplazar por cualquier punto interior de A , pues en realidad lo que utilizamos fue que la bola $B_1(0, 0) \subseteq A$.
- En el segundo inciso consideramos un punto de la frontera de A .

Esto no es un hecho especial que cumpla el conjunto A del ejemplo anterior, de hecho, ocurre en general, como lo afirma la siguiente proposición.

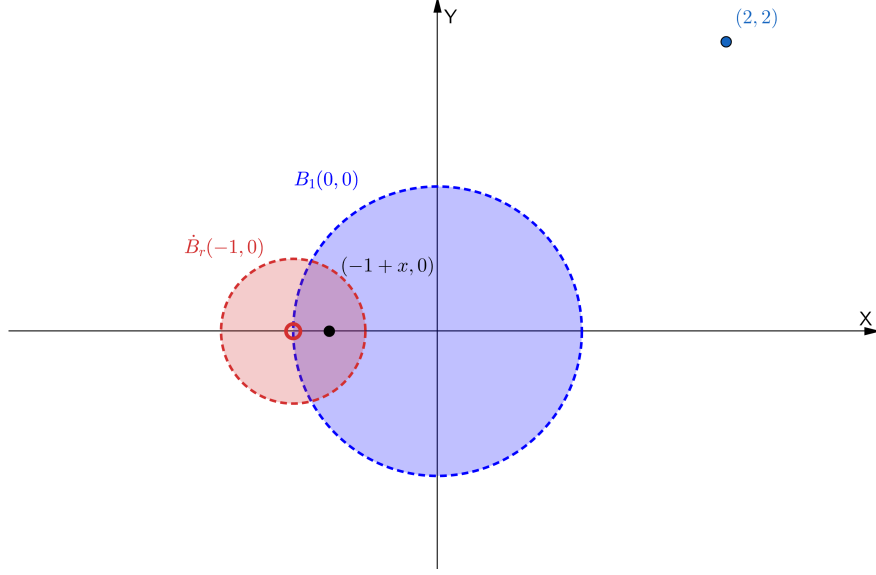


Figura 2: Para cualquier $r > 0$ exhibimos un punto $(-1+x, 0) \in \dot{B}_r(-1, 0) \cap A$, por lo que $\dot{B}_r(-1, 0) \cap A \neq \emptyset$.

Proposición 3 Para cualquier conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\text{int}(A) \subseteq A' \subseteq \text{int}(A) \cup \text{Fr}(A).$$

Demostración. Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \text{int}(A)$ y $r > 0$. Como, $\bar{x} \in \text{int}(A)$, existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(\bar{x}) \subseteq A$. Luego, si hacemos $r_1 = \min\{r, r_0\}$ y $\bar{x}_0 = \left(x_1 + \frac{r_1}{2}, x_2, \dots, x_n\right)$, entonces $\bar{x} \neq \bar{x}_0$ y además

$$\|\bar{x} - \bar{x}_0\| = \|(r_1/2, 0, \dots, 0)\| = \frac{r_1}{2} < r_1.$$

Así, $\bar{x}_0 \in \dot{B}_{r_1}(\bar{x})$.

Por otro lado, note que $\dot{B}_{r_1}(\bar{x}) \subseteq \dot{B}_{r_0}(\bar{x})$, pues $r_1 \leq r_0$, y como $B_{r_0}(\bar{x}) \subseteq A$ se sigue que $\bar{x}_0 \in \dot{B}_{r_1}(\bar{x}) \subseteq A$. Por lo tanto $\dot{B}_{r_1}(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$, pero $\dot{B}_{r_1}(\bar{x}) \subseteq \dot{B}_r(\bar{x})$, pues $r_1 \leq r$, por lo que $\dot{B}_r(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$ y de aquí que $\bar{x} \in A'$.

Ahora supongamos que $\bar{x} \in A'$. Recordemos que $\mathbb{R}^n = \text{int}(A) \cup \text{Fr}(A) \cup \text{ext}(A)$ y que $\text{ext}(A) = \text{int}(A^c) \subseteq A^c$. Así, si $\bar{x} \in \text{ext}(A)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(\bar{x}) \subseteq A^c$, de donde $\dot{B}_r(\bar{x}) \subseteq A^c$ y finalmente $\dot{B}_r(\bar{x}) \cap A = \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que $\bar{x} \in A'$. Por lo tanto, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \text{ext}(A)$, es decir, $\bar{x} \in \text{int}(A) \cup \text{Fr}(A)$. ■

Proposición 4 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Se tiene que $\bar{x}$ es un punto de acumulación de A si y sólo si para cualquier $r > 0$ el conjunto $B_r(\bar{x}) \cap A$ es un conjunto infinito.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que $\bar{x}$ es punto de acumulación de A , pero que existe $r > 0$ tal que $B_r(\bar{x}) \cap A$ es un conjunto finito. Note que también $\dot{B}_r(\bar{x}) \cap A$ es un conjunto finito. Ahora, si $\dot{B}_r(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$, entonces $\bar{x}$ no es punto de acumulación de A . Supongamos entonces que $\dot{B}_r(\bar{x}) \cap A = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ para algunos $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k \in \mathbb{R}^n$ distintos y $k \in \mathbb{N}$. Luego, si consideremos $0 < r_0 < \min\{d(\bar{x}, \bar{x}_i) \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$, entonces $\dot{B}_{r_0}(\bar{x}) \cap A = \emptyset$, de donde, una vez más, $\bar{x}$ no es punto de acumulación de A . Así, debe suceder que para cualquier $r > 0$ $B_r(\bar{x}) \cap A$ es un conjunto infinito.

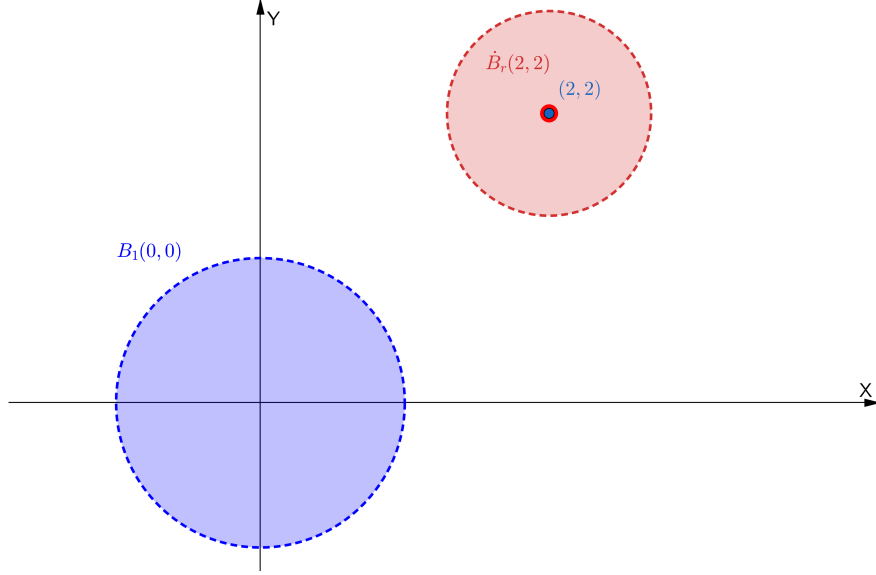


Figura 3: Para $r = 1/2$ vimos que $\dot{B}_r(2,2) \cap A = \emptyset$.

$\Leftarrow$] Supongamos que para cualquier $r > 0$ el conjunto $B_r(\bar{x}) \cap A$ es un conjunto infinito. Se sigue claramente que $\dot{B}_r(\bar{x}) \cap A$ es también un conjunto infinito, en particular $\dot{B}_r(\bar{x}) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\bar{x}$ es un punto de acumulación de A . ■

Note que el siguiente corolario es inmediato.

Corolario 5 Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $A' \neq \emptyset$, entonces A es un conjunto infinito.

Demostración. Sea $\bar{x} \in A'$. Por la proposición anterior, tenemos que, el conjunto $B_1(\bar{x}) \cap A$ es un conjunto infinito. Ahora, como $B_1(\bar{x}) \cap A \subseteq A$, entonces A es infinito. ■

Después de ver lo sencillo del corolario anterior podemos preguntarnos si el regreso vale, es decir, si A es un conjunto infinito, entonces ¿ $A' \neq \emptyset$? ¿Ustedes qué creen? Les sugiero pensar en el conjunto $A = \{(m, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$.