Última actualización: 4 de marzo de 2022

Clase 07

La clase anterior introducimos la notación $\dot{B}_r(\overline{x})$ para el conjunto $B_r(\overline{x}) \setminus \{\overline{x}\}$ donde $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Además, de definir una clasificación de puntos y algunos resultados relacionados a estos:

Definición 1 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Diremos que $\overline{x}$ es un **punto de acumulación** de A si para todo radio $r > 0$ se tiene que $\dot{B}_r(\overline{x}) \cap A \neq \varnothing$. Al conjunto de todos los puntos de acumulación de A lo llamamos **el derivado** de A y lo denotaremos por A', es decir $A' = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overline{x} \text{ es punto de acumulación de } A\}$.*
*$\overline{x}$ es un **punto aislado** de A si $\overline{x} \in A$, pero no es un punto de acumulación de A, es decir, si existe $r > 0$ tal que $\dot{B}_r(\overline{x}) \cap A = \varnothing$.*

Proposición 2 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Se tiene que $\overline{x}$ es un punto de acumulación de A si y sólo si para cualquier $r > 0$ el conjunto $B_r(\overline{x}) \cap A$ es un conjunto infinito.*

Corolario 3 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $A' \neq \varnothing$, entonces A es un conjunto infinito.*

En esta clase comenzaremos el estudio necesario para asegurar, bajo ciertas condiciones, que un conjunto tiene puntos de acumulación.

Rectángulos anidados

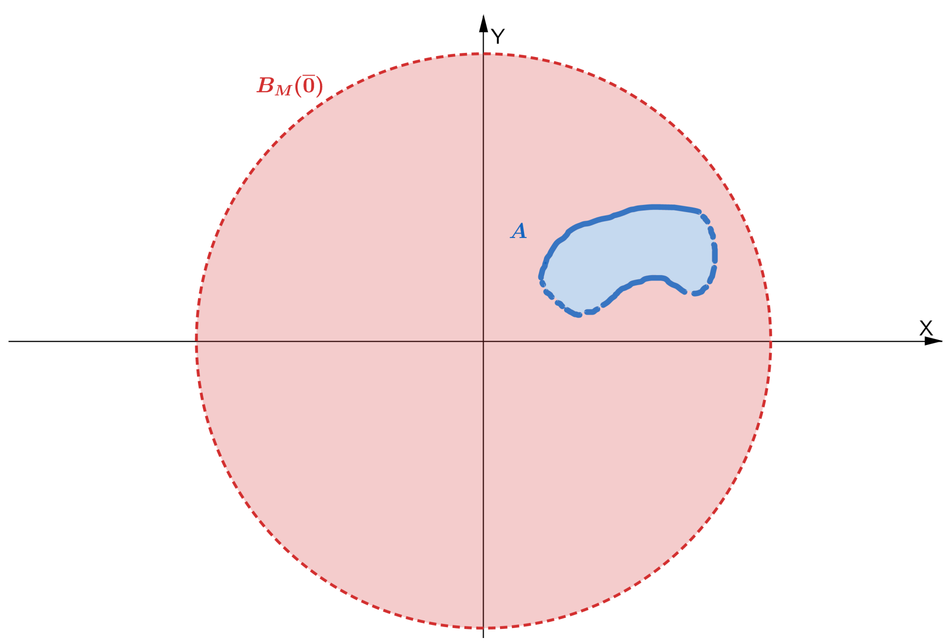


Figura 1: Que un conjunto A sea acotado, se puede interpretar, gráficamente, como que puede ser *encerrado* en una bola de algún radio $M > 0$.

Terminamos la sesión anterior preguntándonos si valía el regreso del Corolario 3, es decir, si A es un conjunto infinito, entonces ¿$A' \neq \varnothing$? Como seguramente ocurrió, después de analizar el conjunto infinito $A = \{(m, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ notaron que la respuesta es NO. No basta con que un conjunto sea infinito para que tenga puntos de acumulación, pero entonces ¿qué se necesita?

Qué tal si ahora consideramos el conjunto, también infinito, $B = \{(1/m, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Después de unos instantes es seguro que hayan notado que, en efecto, $B' \neq 0$ (¿Por ejemplo?), pero ¿cuál es la diferencia con el conjunto A? Pues, al menos, que B si es un conjunto acotado.

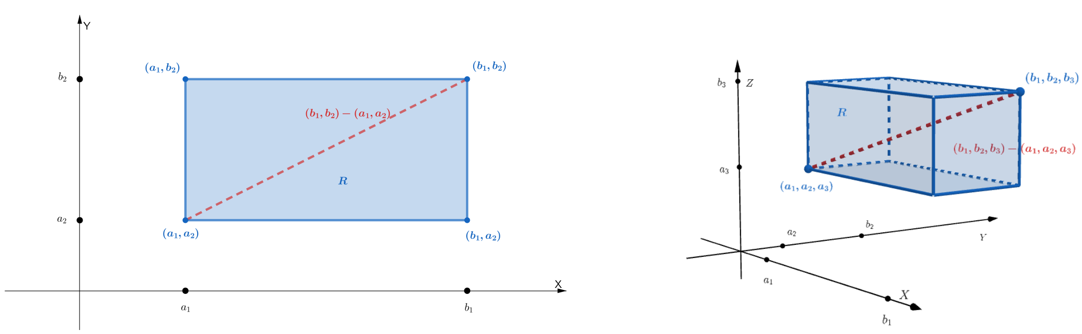
Definición 4 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que A es un **conjunto acotado** si existe $M > 0$ tal que $\|\overline{x}\| \leq M$ para todo $\overline{x} \in A$ (vea figura 1).*

Definición 5 *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_i \leq b_i$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Diremos que el conjunto*

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, \text{ para cada } i \in \{1, 2, ..., n\}\}$$

*es un **rectángulo cerrado** y llamaremos a cada intervalo $[a_i, b_i]$ un **intervalo coordenado** de R, además definimos **la diagonal** de R, denotada por $diag(R)$, como*

$$diag(R) = \|(b_1, b_2, \ldots, b_n) - (a_1, a_2, \ldots, a_n)\|.$$



(a) (b)

Figura 2: Se muestran dos rectángulos, uno en $\mathbb{R}^2$ y el otro en $\mathbb{R}^3$, con los respectivos segmentos cuya longitud es la diagonal del rectángulo.

Enseguida enunciamos un lema con algunas propiedades de los rectángulos cerrados, la demostración de este resultado es un buen ejercicio de escritura.

Lema 6 *Sea $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un rectángulo cerrado. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) R es un conjunto cerrado

(2) Si $\overline{x}, \overline{y} \in R$, entonces $\|\overline{x} - \overline{y}\| \leq diag(R)$.

(3) Si $\overline{x} \in R$ y $diag(R) < r$, entonces $R \subseteq B_r(\overline{x})$.

(4) Si $R' = [a'_1, b'_1] \times [a'_2, b'_2] \times \cdots \times [a'_n, b'_n]$ es un rectángulo cerrado, se tiene que $R' \subseteq R$ si y sólo si $[a'_i, b'_i] \subseteq [a_i, b_i]$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Antes de enunciar el siguiente teorema es conveniente enunciar la versión del mismo teorema que, seguramente, vieron en sus cursos de Cálculo I:

Teorema 7 (Teorema de los Intervalos anidados) *Para cada $k \in \mathbb{N}$ sean $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ con $a_k \leq b_k$ e I_k el intervalo cerrado $I_k = [a_k, b_k]$. Suponga además que $a_k \leq a_{k+1}$ y que $b_{k+1} \leq b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \varnothing.$$

Teorema 8 *Sea $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión anidada de rectángulos cerrados, es decir, $R_{k+1} \subseteq R_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k \neq \varnothing.$$

Si además se cumple que $\lim_{k\to\infty} diag(R_k) = 0$, entonces

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k = \{\overline{x}_0\},$$

para algún $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$R_k = [a_{1,k}, b_{1,k}] \times \cdots \times [a_{n,k}, b_{n,k}].$$

Por el inciso (4) del Lema 6, se tiene que

$$[a_{i,k+1}, b_{i,k+1}] \subseteq [a_{i,k}, b_{i,k}],$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, por el Teorema 7, tenemos que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_{i,k}, b_{i,k}] \neq \varnothing,$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Podemos entonces considerar un elemento $x_i \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_{i,k}, b_{i,k}]$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Note que

$$\overline{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k,$$

con lo que $\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k \neq \varnothing$.

Ahora, supongamos que $\lim_{k\to\infty} diag(R_k) = 0$ y consideremos $\overline{x}, \overline{y} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k$. Por el inciso (2) del Lema 6, se tiene que

$$0 \leq \|\overline{x} - \overline{y}\| \leq diag(R_k),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, por lo que

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \|\overline{x} - \overline{y}\| \leq \lim_{x\to\infty} diag(R_k) = 0.$$

De aquí que $\overline{x} = \overline{y}$ y luego $\left|\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k\right| = 1$. Esto es, existe $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k = \{\overline{x}_0\}$. ■

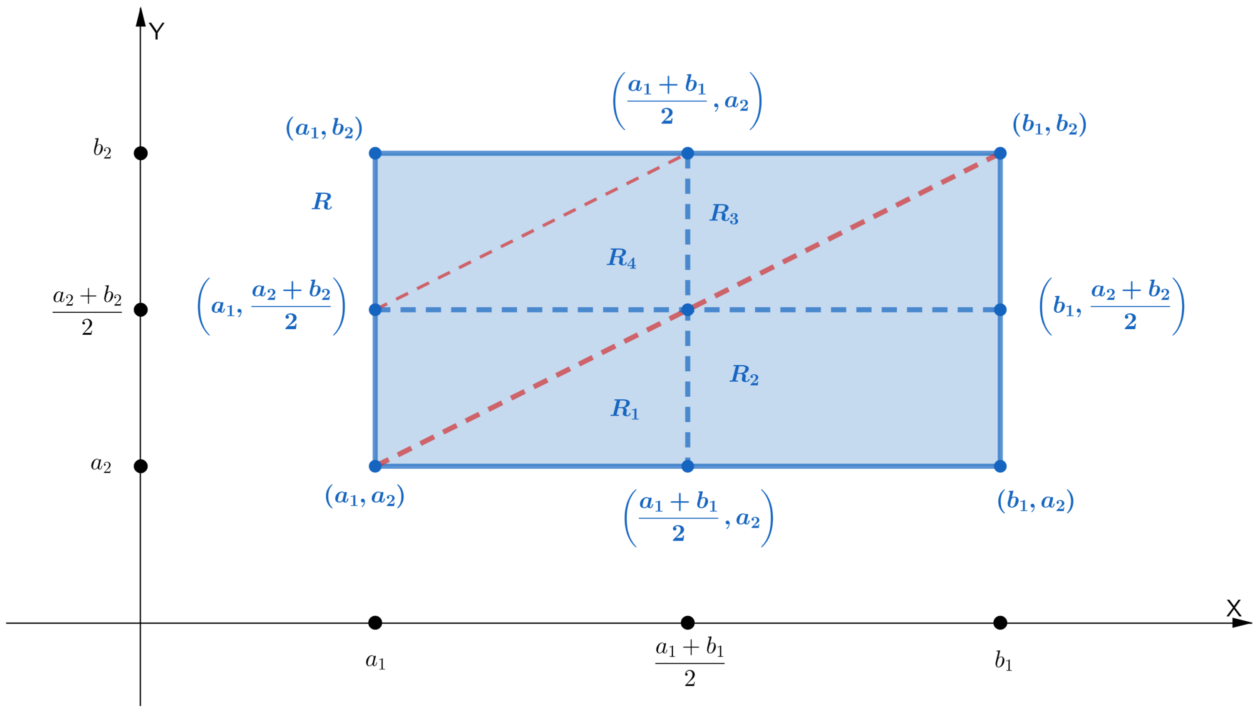


Figura 3: Al dividir por la mitad cada intervalo coordenado se obtienen 2^n rectángulos.

Observación 9 *Si* $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ *es un rectángulo cerrado y dividimos cada intervalo* $[a_i, b_i]$ *por la mitad, es decir, en los siguientes intervalos:*

$$\left[a_i, \frac{a_i+b_i}{2}\right] \qquad y \qquad \left[\frac{a_i+b_i}{2}, b_i\right].$$

Y consideramos todos los rectángulos que tengan como i-ésimo intervalo coordenado a alguno de estos intervalos, entonces tendremos 2^n *rectángulos cerrados* R_j*, vea figura 3, que cumplen:*

(1) $R_j \subseteq R$

(2) $R = \bigcup_{j=1}^{2^n} R_j$.

(3) $diag(R_j) = \frac{1}{2} diag(R)$.