Clase 08

La clase pasada trabajamos el material necesario para demostrar el Teorema de Bolzano-Weierstrass:

Teorema 1 *Sea $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión anidada de rectángulos cerrados, es decir, $R_{k+1} \subseteq R_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k \neq \varnothing$. Si además se cumple que $\lim_{k\to\infty} diag(R_k) = 0$, entonces $\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k = \{\overline{x}_0\}$, para algún $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Observación 2 *Si $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es un rectángulo cerrado y dividimos cada intervalo $[a_i, b_i]$ por la mitad, es decir, en los siguientes intervalos:*

$$\left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2}\right] \qquad y \qquad \left[\frac{a_i + b_i}{2}, b_i\right].$$

Y consideramos todos los rectángulos que tengan como i-ésimo intervalo coordenado a alguno de estos intervalos, entonces tendremos 2^n rectángulos cerrados R_j que cumplen:

(1) $R_j \subseteq R$

(2) $R = \bigcup_{j=1}^{2^n} R_j$.

(3) $diag(R_j) = \frac{1}{2} diag(R)$.

En esta ocasión enunciaremos y demostraremos el Teorema de Bolzano-Weierstrass.

El Teorema de Bolzano-Weierstrass

Teorema 3 (de Bolzano-Weierstrass) *Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado e infinito, entonces $A' \neq \varnothing$.*

Demostración. Construiremos una sucesión de rectángulos anidados de manera que cada uno de ellos tenga una infinidad de puntos del conjunto A y que la sucesión de diagonales correspondiente converja a cero. De esta manera, aplicaremos el Teorema de Rectángulos anidados para obtener un punto y luego demostraremos que dicho punto es un punto de acumulación de A, vea figura 1.

Como A es acotado, existe $M > 0$ tal que $\|\overline{x}\| \leq M$, para todo $\overline{x} \in A$. Ahora, si $R = [-M, M] \times [-M, M] \times \cdots \times [-M, M]$, entonces $A \subseteq R$ y además

$$diag(R) = \|(M, \ldots, M) - (-M, \ldots, -M)\| = \|(2M, \ldots, 2M)\| = \sqrt{4nM^2} = 2\sqrt{n}M.$$

Si dividimos R, como en la Observación 2, dado que A es infinito, al menos uno de los 2^n rectángulos cerrados que se obtienen debe tener una infinidad de puntos de A. Llamemos R_1 a alguno de los rectángulos cerrados con esta característica. Se tiene entonces que

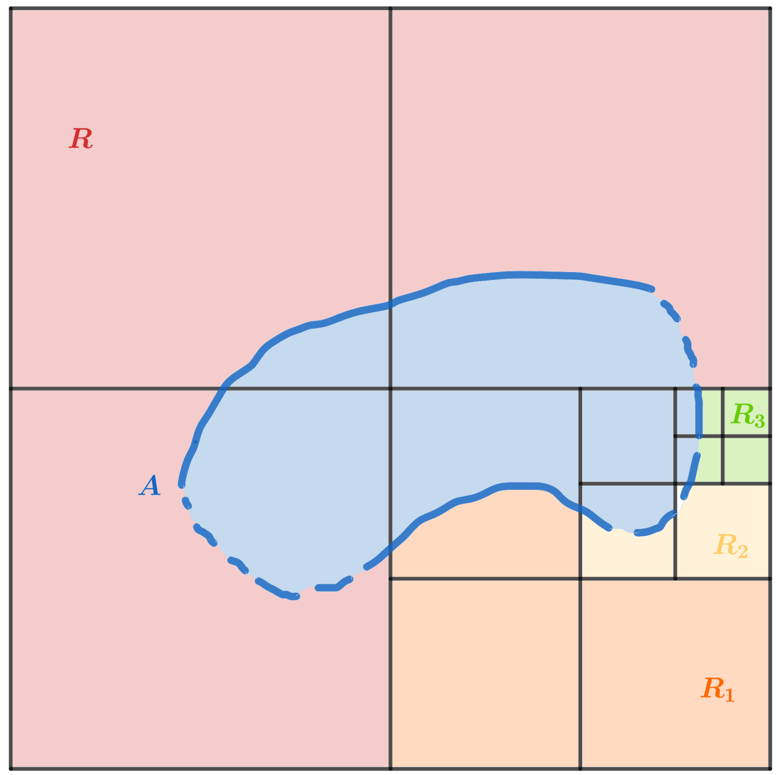

Figura 1: Se muestra la construcción de la sucesión de rectángulos anidados $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

1. $R_1 \subseteq R$.
2. $A \cap R_1$ es un conjunto infinito.
3. $diag(R_1) = \dfrac{1}{2}diag(R) = \sqrt{n}M$.

Ahora dividimos R_1 como en la Observación 2. En alguno de los 2^n rectángulos que se obtiene al dividir R_1 hay una infinidad de puntos de A, pues $A \cap R_1$ es infinito. Sea R_2 uno de estos rectángulos. Entonces

1. $R_2 \subseteq R_1$.
2. $(A \cap R_1) \cap R_2 = A \cap (R_1 \cap R_2) = A \cap R_2$ es un conjunto infinito.
3. $diag(R_2) = \dfrac{1}{2}diag(R_1) = \dfrac{1}{2}\sqrt{n}M$.

Supongamos entonces que para $k \in \mathbb{N}$ se tienen k rectángulos cerrados tales que

1. $R_k \subseteq R_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq R_2 \subseteq R_1$.
2. $A \cap R_k$ es un conjunto infinito.
3. $diag(R_k) = \dfrac{1}{2}diag(R_{k-1}) = \dfrac{1}{2^{k-1}}\sqrt{n}M$.

Para obtener el siguiente rectángulo dividimos R_k como en la Observación 2. Como $A \cap R_k$ es infinito, en alguno de los 2^n rectángulos obtenidos existe una infinidad de puntos de A. Llamemos R_{k+1} a dicho rectángulo. Se tiene entonces que

1. $R_{k+1} \subseteq R_k$.
2. $(A \cap R_k) \cap R_{k+1} = A \cap (R_k \cap R_{k+1}) = A \cap R_{k+1}$ es un conjunto infinito.
3. $diag(R_{k+1}) = \dfrac{1}{2} diag(R_k) = \dfrac{1}{2^k}\sqrt{n}M$.

De esta manera, obtenemos una sucesión de rectángulos $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que satisfacen las hipótesis del Teorema 1. Así, se tiene que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k = \{\overline{x}_0\},$$

para algún $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Afirmamos que $\overline{x}_0$ es un punto de acumulación del conjunto A :
Sea $r > 0$. Como $\lim_{k\to\infty} diag(R_k) = 0$, para $r > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq diag(R_k) \leq r,$$

para todo $k \geq K$. Ahora, dado que $\overline{x}_0 \in R_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$ (en particular si $k \geq K$), por el inciso (3) del Lema 4 de la Clase 07, se tiene que $R_k \subseteq B_r(\overline{x}_0)$ para todo $k \geq K$. Luego, $A \cap R_k \subseteq A \cap B_r(\overline{x}_0)$. Pero, $A \cap R_k$ es un conjunto infinito, por lo que $A \cap B_r(\overline{x}_0)$ es un conjunto infinito. Así, por la Proposición 4 de la Clase 06, $\overline{x}_0$ es un punto de acumulación de A y por lo tanto $A' \neq \varnothing$. ∎