Última actualización: 15 de marzo de 2022

Clase 10

La clase pasada, entre otras cosas, introducimos las siguientes definiciones:

Definición 1 *Sean $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que B y C están* ***separados*** *si $B \cap \overline{C} = \varnothing = \overline{B} \cap C$.*

Definición 2 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que A es un* ***conjunto disconexo*** *si existen $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacíos, tales que:*

(1) $A = B \cup C$.

(2) B y C están separados.

Y diremos que A es un ***conjunto conexo*** *si A no es disconexo.*

Definición 3 *Sean $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$. Definimos* ***el segmento que une $\overline{x}$ con $\overline{y}$****, denotado por $[\overline{x}, \overline{y}]$, como el conjunto dado por $[\overline{x}, \overline{y}] = \{\overline{x} + t\,(\overline{y} - \overline{x}) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\}$.*

Definición 4 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que A es un* ***conjunto convexo*** *si para cada $\overline{x}, \overline{y} \in A$ se tiene que $[\overline{x}, \overline{y}] \subseteq A$.*

Convexidad implica conexidad

Lema 5 *Sean $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x} \in B$ y $\overline{y} \in C$. Si B y C están separados, entonces $[\overline{x}, \overline{y}] \nsubseteq B \cup C$.*

Demostración. Por hipótesis, tenemos que $B \cap \overline{C} = \varnothing = \overline{B} \cap C$ y de aquí que $B \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$ y $C \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$. Hallaremos un punto en $[\overline{x}, \overline{y}]$ que no pertenezca a $B \cup C$, para ello, consideremos el conjunto

$$S = \{s \in [0,1] \mid \overline{x} + t\,(\overline{y} - \overline{x}) \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{C} \quad \forall t \in [0,s]\}.$$

Note que $S \neq \varnothing$, pues $\overline{x} + 0\,(\overline{y} - \overline{x}) = \overline{x} \in B \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$, es decir, $s = 0 \in S$.

Luego, por la definición de S, se tiene que $S \subseteq [0,1]$, así que S es también un conjunto acotado. Así, por el Axioma del Supremo, existe $\alpha = \sup(S)$ y note además que $\alpha \in [0,1]$. Por lo tanto, si $\overline{x}_0 = \overline{x} + \alpha\,(\overline{y} - \overline{x})$, entonces $\overline{x}_0 \in [\overline{x}, \overline{y}]$.

Afirmación 1: $[0, \alpha) \subseteq S$.

Sea $s \in [0, \alpha)$, es decir, $0 \leq s < \alpha$. Como $\alpha = \sup(S)$, existe $s' \in S$ tal que $s < s' < \alpha$. Así, $\overline{x} + t\,(\overline{y} - \overline{x}) \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$, para todo $t \in [0, s']$, en particular, para todo $t \in [0, s]$. Así, $s \in S$ y por lo tanto $[0, \alpha) \subseteq S$.

Afimación 2: $\overline{x}_0 \notin B$.

Supongamos que $\overline{x}_0 \in B$. Entonces $\alpha < 1$ ($\alpha = 1$ implicaría que $\overline{x}_0 = \overline{y} \in C$, luego $\overline{x}_0 \in B \cap C = \varnothing$!) y $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$. Ahora, como $\overline{C}$ es un conjunto cerrado, entonces $\mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$ es un conjunto abierto, así que existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$. Sea

$$r' = \text{mín}\left\{\frac{1-\alpha}{2}, \frac{r}{2\|\overline{x} - \overline{y}'|}\right\}.$$

Se tiene, para todo $t \in [\alpha, \alpha + r']$, que

$$\begin{aligned}
\|\overline{x}_0 - (\overline{x} + t\,(\overline{y} - \overline{x}))\,\| &= \|\,(\overline{x} + \alpha\,(\overline{y} - \overline{x})) - (\overline{x} + t\,(\overline{y} - \overline{x}))\,\| \\
&= \|\,(\alpha - t)\,(\overline{y} - \overline{x})\,\| \\
&= (t - \alpha)\,\|\overline{y} - \overline{x}\| \\
&\leq r'\|\overline{y} - \overline{x}\| \\
&\leq \frac{r}{2\|\overline{x} - \overline{y}\|}\|\overline{y} - \overline{x}\| \\
&< r,
\end{aligned}$$

es decir, $\overline{x} + t\,(\overline{y} - \overline{x}) \in B_r(\overline{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$, para todo $t \in [\alpha, \alpha']$. Ahora, como $\overline{x} + t\,(\overline{y} - \overline{x}) \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$, para todo $t \in [0, \alpha)$, se sigue que $\overline{x} + t\,(\overline{y} - \overline{x}) \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$, para todo $t \in [0, \alpha + r']$. De aquí que $\alpha + r' \in S$, lo que contradice que $\alpha = \sup(S)$. Por lo tanto, $\overline{x}_0 \notin B$.

Note que si $\overline{x}_0 \notin C$, entonces terminamos, pues esto mostraría que $[\overline{x}, \overline{y}] \nsubseteq B \cup C$. Ahora, si ocurre que $\overline{x}_0 \in C$, entonces construiremos un punto $\overline{x}_0' \in [\overline{x}, \overline{y}]$ que cumpla que $\overline{x}_0' \notin B \cup C$. Supongamos entonces que $\overline{x}_0 \in C$. En este caso, tenemos que $0 < \alpha$ ($\alpha = 0$ implicaría que $\overline{x}_0 = \overline{x} \in B$, luego $\overline{x}_0 \in B \cap C = \varnothing$!) y $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$. Como $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$ es un conjunto abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$. Sean

$$t' = \text{mín}\left\{\frac{\alpha}{2}, \frac{r}{2\|\overline{x} - \overline{y}\|}\right\}$$

y

$$\overline{x}_0' = \overline{x} + \big(\alpha - t'\big)\,(\overline{y} - \overline{x})\,.$$

Note que $\overline{x}_0' \in [\overline{x}, \overline{y}]$, pues $0 < t' \leq \dfrac{\alpha}{2} < \alpha \leq 1$. Luego, como $[0, \alpha) \subseteq S$, se tiene que $\alpha - t' \in S$ y así, $\overline{x}_0' \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$, de donde $\overline{x}_0' \notin C$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\|\overline{x}_0 - \overline{x}_0'\| &= \|\overline{x} + \alpha\,(\overline{y} - \overline{x}) - \big(\overline{x} + \big(\alpha - t'\big)\,(\overline{y} - \overline{x})\big)\,\| \\
&= \|t'\,(\overline{y} - \overline{x})\,\| \\
&= t'\|\overline{y} - \overline{x}\| \\
&\leq \frac{r}{2} \\
&< r,
\end{aligned}$$

con lo que $\overline{x}_0' \in B_r(\overline{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$ y de aquí que $\overline{x}_0' \notin B$. Por lo tanto, $\overline{x}_0' \notin B \cup C$. En cualquier caso $[\overline{x}, \overline{y}] \nsubseteq B \cup C$. ■

Teorema 6 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si A es un conjunto convexo, entonces es un conjunto conexo.*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Supongamos que A es un conjunto convexo, pero que no es conexo. Así, existen $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacíos, tales que $A = B \cup C$ y B y C están separados. Como B y C son no vacíos, entonces podemos considerar $\overline{x} \in B \subseteq A$ y $\overline{y} \in C \subseteq A$. Luego, por el lema anterior, se tiene que $[\overline{x}, \overline{y}] \nsubseteq B \cup C = A$, lo que contradice el hecho de que A es convexo. Por lo tanto A es un conjunto conexo. ■

Antes de terminar esta sesión una pregunta obligada es si el *regreso* del teorema anterior es cierto, es decir, si A es un conjunto conexo, entonces ¿A es convexo? La respuesta es fácil, al menos gráficamente, vea figura 1.

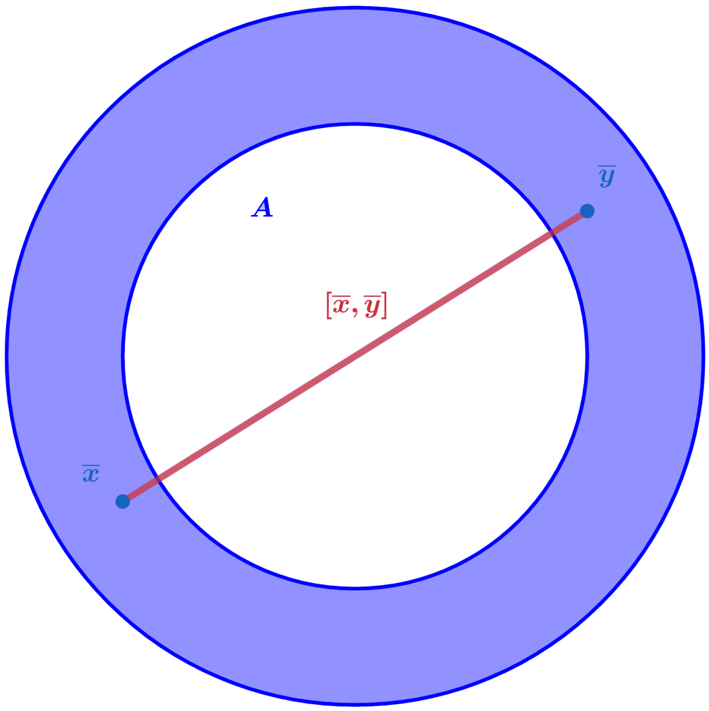

Figura 1: El conjunto A es conexo, pero no convexo.