Clase 11

Para esta sesión es conveniente recordar los sguiente:

Definición 1 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que A es un* ***conjunto disconexo*** *si existen $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacíos, tales que $A = B \cup C$ y B y C están separados. Diremos que A es un* ***conjunto conexo*** *si A no es disconexo.*

Proposición 2 *Sean $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) Si B y C son abiertos, entonces B y C están separados si y sólo si $B \cap C = \varnothing$.

(2) Si B y C son cerrados, entonces B y C están separados si y sólo si $B \cap C = \varnothing$.

Definición 3 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que A es un* ***conjunto convexo*** *si para cada $\overline{x}, \overline{y} \in A$ se tiene que $[\overline{x}, \overline{y}] \subseteq A$.*

Lema 4 *Sean $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{x} \in B$ y $\overline{y} \in C$. Si B y C están separados, entonces $[\overline{x}, \overline{y}] \nsubseteq B \cup C$.*

Teorema 5 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si A es un conjunto convexo, entonces es un conjunto conexo.*

Aunque ya hemos visto (al menos gráficamente) que un conjunto conexo no es necesariamente convexo, aún podemos proporcionar un resultado bastante similar, al menos para conjuntos abiertos.

Conexidad y poligonales

Definición 6 *Dados $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k \in \mathbb{R}^n$, diremos que el conjunto*

$$[\overline{x}, \overline{x}_1] \cup [\overline{x}_1, \overline{x}_2] \cup \cdots \cup [\overline{x}_k, \overline{y}]$$

es una poligonal que une $\overline{x}$ con $\overline{y}$.

Proposición 7 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y no vacío. Se tiene que A es conexo si y sólo si para cada par de puntos $\overline{x}, \overline{y} \in A$, existe una poligonal contenida en A que une $\overline{x}$ con $\overline{y}$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que A es conexo y $\overline{x}_0 \in A$ fijo. Mostraremos que para cualquier $\overline{x} \in A$ existe una poligonal contenida en A que une $\overline{x}$ con $\overline{x}_0$, de esta manera, si $\overline{y} \in A$ es cualquier otro punto de A, la unión de las dos poligonales existentes, contenidas en A, resultará una poligonal contenida en A que une $\overline{x}$ con $\overline{y}$.

Consideremos los conjuntos

$$U = \{\overline{x} \in A \mid \text{existe una poligonal contenida en } A \text{ que une } \overline{x} \text{ con } \overline{x}_0\}$$

y

$$V = \{\overline{x} \in A \mid \text{NO existe una poligonal contenida en } A \text{ que une } \overline{x} \text{ con } \overline{x}_0\}.$$

Note que $A = U \cup V$, $U \cap V = \varnothing$ y además $U \neq \varnothing$, pues $\overline{x}_0 \in U$. Ahora, si mostramos que $U = A$ habremos terminado.

Afirmación: U y V son conjuntos abiertos.

Veamos primero que U es abierto y para ello sea $\overline{x} \in U$. Como $U \subseteq A$ y A es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subseteq A$. Veamos que $B_r(\overline{x}) \subseteq U$. Sea $\overline{y} \in B_r(\overline{x})$. Como $\overline{x} \in U$, existe una poligonal contenida en A que une $\overline{x}$ con $\overline{x}_0$, digamos $[\overline{x}, \overline{x}_1] \cup [\overline{x}_1, \overline{x}_2] \cup \cdots \cup [\overline{x}_k, \overline{x}_0]$. Por otro lado, usando que cualquier bola es un conjunto convexo, se tiene que $[\overline{y}, \overline{x}] \subseteq B_r(\overline{x}) \subseteq A$. Así, tenemos que

$$[\overline{y}, \overline{x}] \cup [\overline{x}, \overline{x}_1] \cup [\overline{x}_1, \overline{x}_2] \cup \cdots \cup [\overline{x}_k, \overline{x}_0]$$

es una poligonal contenida en A que une $\overline{y}$ con $\overline{x}_0$ Luego, por la definición de U, se sigue que $\overline{y} \in U$. Por lo tanto, $B_r(\overline{x}) \subseteq U$ y de aquí que U es un conjunto abierto.

Veamos ahora que V es abierto. Sea $\overline{x} \in V$. Como $V \subseteq A$ y A es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subseteq A$. En este caso, también demostraremos que $B_r(\overline{x}) \subseteq V$. Supongamos que no es así, es decir, que existe $\overline{y} \in B_r(\overline{x})$ tal que $\overline{y} \notin V$. Como $A = U \cup V$, entonces $\overline{y} \in U$, por lo que existe una poligonal contenida en A que une $\overline{y}$ con $\overline{x}_0$, digamos $[\overline{y}, \overline{y}_1] \cup [\overline{y}_1, \overline{y}_2] \cup \cdots \cup [\overline{y}_k, \overline{x}_0]$. Ahora, usando una vez más que cualquier bola es un conjunto convexo, se tiene que $[\overline{x}, \overline{y}] \subseteq B_r(\overline{x}) \subseteq A$. Por lo que,

$$[\overline{x}, \overline{y}] \cup [\overline{y}, \overline{y}_1] \cup [\overline{y}_1, \overline{y}_2] \cup \cdots \cup [\overline{y}_k, \overline{x}_0]$$

es una poligonal contenida en A que une $\overline{x}$ con $\overline{x}_0$, lo que es una contradicción al hecho de que $\overline{x} \in V$. Así, $B_r(\overline{x}) \subseteq V$ y de aquí que V es un conjunto abierto.

Note entonces que, si $V \neq \varnothing$, entonces tenemos dos conjuntos abiertos ajenos U, V, y por lo tanto separados (vea Proposición 2), tales que $A = U \cup V$. Se sigue que A es disconexo, lo que es una contradicción. Así, debe suceder que $V = \varnothing$ y luego $A = U$.

$\Leftarrow]$ Supongamos que para cada par de puntos $\overline{x}, \overline{y} \in A$, existe una poligonal contenida en A que une $\overline{x}$ con $\overline{y}$ y que A es disconexo. Entonces, existen $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacíos y separados tales que $A = B \cup C$. Consideremos ahora $\overline{x} \in B$, $\overline{y} \in C$ y

$$[\overline{x}, \overline{x}_1] \cup [\overline{x}_1, \overline{x}_2] \cup \cdots \cup [\overline{x}_k, \overline{y}]. \tag{1}$$

cualquier poligonal que une $\overline{x}$ con $\overline{y}$. Note que, si para alguna $i \in \{1, ..., k\}$, $\overline{x}_i \notin A$, entonces la poligonal (1) no está contenida en A. Supongamos entonces que, para toda $i \in \{1, ..., k\}$, $\overline{x}_i \in A$. Así, si hacemos $\overline{x}_0 = \overline{x}$ y $\overline{x}_{k+1} = \overline{y}$, entonces existe $i \in \{0, 1..., k\}$ de tal manera que $\overline{x}_i \in B$ y $\overline{x}_{i+1} \in C$. Luego, por el Lema 4, $[\overline{x}_i, \overline{x}_{i+1}] \nsubseteq B \cup C = A$, de donde la poligonal (1) no está contenida en A. Entonces, no existe una poligonal contenida en A que una $\overline{x}$ comn $\overline{y}$, lo que es una contradicción. Así, A es conexo. ■

Esta proposición nos permite mostrar formalmente un ejemplo de un conjunto conexo que no es convexo.

Ejemplo 8 *Muestre que el conjunto* $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \,|\, x \leq 0 \text{ y } y = 0\}$ *es un conjunto conexo, pero no convexo.*

Solución. En la Ayudantía 05 vimos que el conjunto A es un conjunto abierto, así que para mostrar que es conexo, por la Proposición 7, es suficiente mostrar que para cualesquiera puntos $\overline{x}, \overline{y} \in A$ existe una poligonal contenida en A que une $\overline{x}$ con $\overline{y}$. Ahora, como vimos en la prueba de la misma proposición, basta demostrar que para cualquier punto $(x, y) \in A$ existe una poligonal contenida en A que une (x, y) con $(1, 0)$.

Sea $(x,y)\in A$. Note que podemos trabajar dos casos, cuando $y=0$ y $x>0$ y cuando $y\neq 0$ y $x\in\mathbb{R}$.

Supongamos primero que $y=0$ y $x>0$. Entonces

$$\begin{aligned}[(x,0),(1,0)] &= \left\{(x,0)+t\left((1,0)-(x,0)\right)\in\mathbb{R}^2 \mid t\in[0,1]\right\}\\ &= \left\{(x+t-xt,0)\in\mathbb{R}^2 \mid t\in[0,1]\right\}\\ &= \left\{(x(1-t)+t,0)\in\mathbb{R}^2 \mid t\in[0,1]\right\}.\end{aligned}$$

Pero, $x(1-t)+t>0$, para todo $t\in[0,1]$, por lo que $[(x,0),(1,0)]\subseteq A$.

Supongamos ahora que $y\neq 0$ y $x\in\mathbb{R}$. En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}[(x,y),(1,0)] &= \left\{(x,y)+t\left((1,0)-(x,y)\right)\in\mathbb{R}^2 \mid t\in[0,1]\right\}\\ &= \left\{(x+t-xt,y-yt)\in\mathbb{R}^2 \mid t\in[0,1]\right\}\\ &= \left\{(x(1-t)+t,y(1-t))\in\mathbb{R}^2 \mid t\in[0,1]\right\}.\end{aligned}$$

Ahora, si $t\in[0,1)$, entonces $y(1-t)\neq 0$ y si $t=1$, entonces $x(1-t)+t=1$, en cualquier caso $[(x,y),(1,0)]\subseteq A$.

Concluimos que A es un conjunto conexo.

Para ver que A no es convexo, consideremos los puntos $(-1,1),(-1,-1)\in A$. Luego, el punto $(-1,0)\notin A$, pero

$$(-1,0)=(-1,1)+\frac{1}{2}\left((-1,-1)-(-1,1)\right),$$

es decir, $(-1,0)\in[(-1,1),(-1,-1)]$. ■

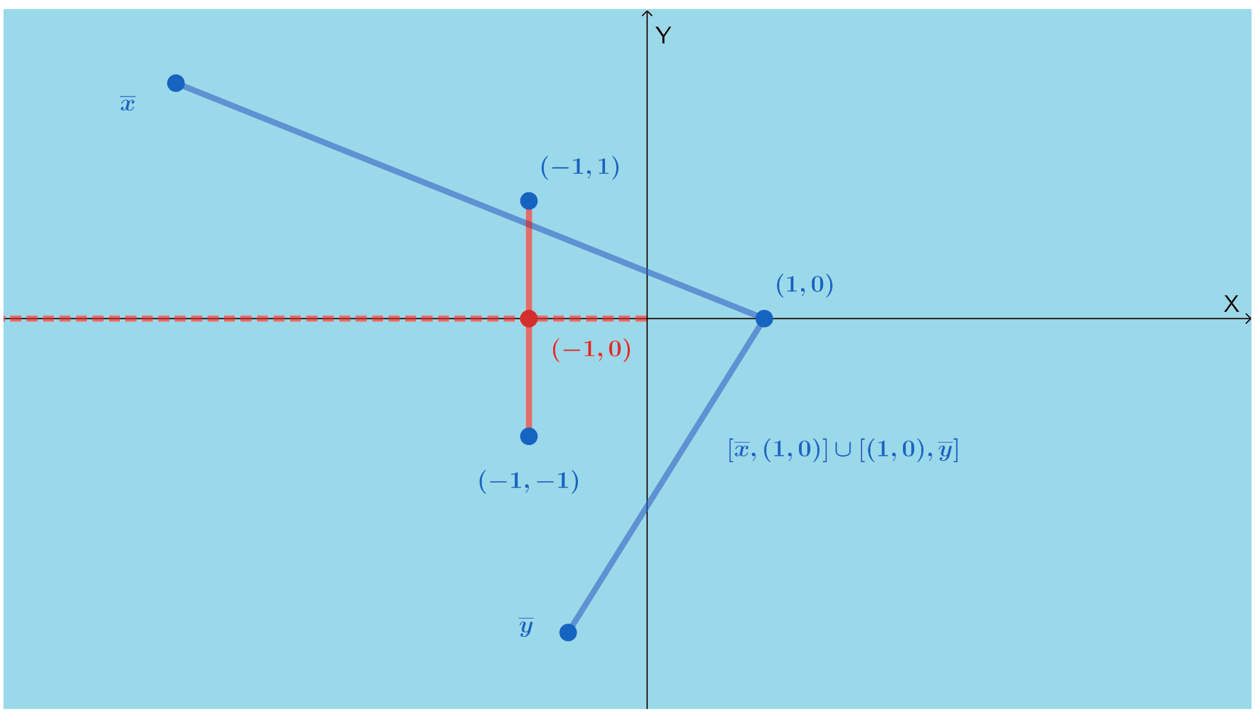

Figura 1: Para cualquier par de puntos $\overline{x},\overline{y}\in A$ existe una poligonal contenida en A que une $\overline{x}$ con $\overline{y}$ y como A es abierto, entonces es conexo. El segmento $[(-1,1),(-1,-1)]$ no está contenido en A, por lo que A no es convexo.