Última actualización: 17 de marzo de 2022

Clase 12

Recordemos lo siguiente:

Definición 1 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que A es un **conjunto disconexo** si existen $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacíos, tales que $A = B \cup C$ y B y C están separados. Diremos que A es un **conjunto conexo** si A no es disconexo.*

Teorema 2 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si A es un conjunto convexo, entonces es un conjunto conexo.*

Definición 3 *Dados $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k \in \mathbb{R}^n$, diremos que el conjunto $[\overline{x}, \overline{x}_1] \cup [\overline{x}_1, \overline{x}_2] \cup \cdots \cup [\overline{x}_k, \overline{y}]$ es una poligonal que une $\overline{x}$ con $\overline{y}$.*

Proposición 4 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y no vacío. Se tiene que A es conexo si y sólo si para cada par de puntos $\overline{x}, \overline{y} \in A$, existe una poligonal contenida en A que une $\overline{x}$ con $\overline{y}$.*

En todo el trabajo realizado antes, solo hemos logrado una caracterización de los conjuntos conexos que son abiertos. Pues, en esta ocasión, proporcionaremos una caracterización de los conjuntos conexos sin una hipótesis adicional en ellos.

Una caracterización de los conjuntos conexos

Comenzamos caracterizando a los conjuntos disconexos.

Proposición 5 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se tiene que A es disconexo si y sólo si existen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos tales que*

(1) $A \subseteq U \cup V$

(2) $A \cap U \neq \varnothing \neq A \cap V$

(3) $A \cap U \cap V = \varnothing$

Demostración. $\Rightarrow$] Si A es disconexo, entonces existen $B, C \subseteq \mathbb{R}^n$, no vacíos y separados tales que $A = B \cup C$.

Si $U = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$ y $V = \mathbb{R}^n \setminus \overline{C}$, entonces U y V son conjuntos abiertos. Ahora, como $\overline{B} \cap C = \varnothing = B \cap \overline{C}$, se tiene que $C \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B} = U$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{C} = V$, de donde

$$A = B \cup C \subseteq U \cup V.$$

Por otro lado, se tiene que $\varnothing \neq C = A \cap C \subseteq A \cap U$ y $\varnothing \neq B = A \cap B \subseteq A \cap V$, de donde

$$A \cap U \neq \varnothing \neq A \cap V.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} A \cap U \cap V &= A \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}\right) \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{C}\right) \\ &= A \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right)\right) \\ &= (B \cup C) \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right)\right) \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$] Supongamos que existen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos que satisfacen los incisos (1), (2) y (3) y consideremos los conjuntos $B = A \cap U$ y $C = A \cap V$. Por el inciso (2), se tiene que B y C son no vacíos.

Ahora, note que $\overline{B} \cap C = \left(\overline{A \cap U}\right) \cap (A \cap V) \subseteq V$. Así, si $\overline{x} \in \overline{B} \cap C$, entonces $\overline{x} \in V$ y como V es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subseteq V$. Pero también $B_r(\overline{x}) \cap (A \cap U) \neq \varnothing$, pues $\overline{x} \in \overline{A \cap U}$. Así,

$$\varnothing \neq B_r(\overline{x}) \cap (A \cap U) \subseteq V \cap (A \cap U) = A \cap U \cap V.$$

Lo cual no puede ocurrir por el inciso (3). Así, $\overline{B} \cap C = \varnothing$ y de manera simétrica se demuestra que $B \cap \overline{C} = \varnothing$, con lo que B y C son separados.

Finalmente, del inciso (1), se tiene que

$$A = A \cap (U \cup V) = (A \cap U) \cup (A \cap V) = B \cup C.$$

Luego, A es disconexo. ■

Como corolario de esta proposición obtenemos una caracterización para conjuntos conexos.

Corolario 6 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se tiene que A es conexo si y sólo si NO existen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos tales que*

(1) $A \subseteq U \cup V$

(2) $A \cap U \neq \varnothing \neq A \cap V$

(3) $A \cap U \cap V = \varnothing$