Ayudantía 11
Dominio, conjuntos de nivel y conjunto imagen de funciones de varias variables

Ejercicio 1. *Halle el dominio de la función determinada por la regla de correspondencia* $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Solución. Ya que el dominio de una función se estable como el conjunto de puntos donde "las cuentas se pueden realizar", para encontrar el dominio nos basta determinar los valores donde tiene sentido hacer las cuentas. Tenemos que la única restricción que aparece en la regla de correspondencia es la raíz cuadrada, por lo cual, debemos encontrar puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $x^2+y^2 \geq 0$: como para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}$ se cumple que $x^2+y^2 \geq 0$, entonces para cualquier punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ está definido. Esto prueba que $\mathbb{R}^3 \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Finalmente, ya que $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$, se concluye que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^3$. ∎

Ejercicio 2. *Halle todos los conjuntos de nivel* $N_c(f)$ *de la función* $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Solución. Usaremos la definición para encontrar los conjuntos de nivel. Para cualquier $c \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$N_f(c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = c\}.$$

Notamos que cuando $c \neq 0$ obtenemos una hipérbola, y cuando $c = 0$ se trata de dos rectas que se intersecan en el origen. En la Figura 1 se presenta una representación de algunos conjuntos de nivel de f. ∎

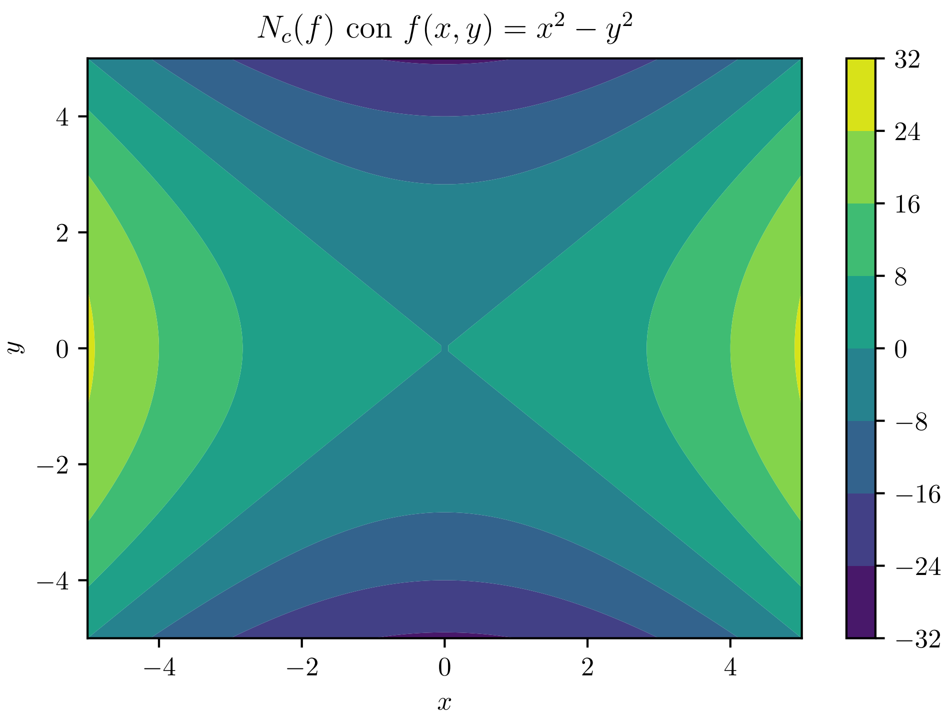

Figura 1: Conjuntos de nivel de $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Ejercicio 3. *Considere la función* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $f(x,y) = (x\cos(y), x\operatorname{sen}(y), x)$. *Si* $A = \mathbb{R}^2$, *determine* $f(A)$.

Solución. Notemos que si $\overline{u} = (u,v) \in A = \mathbb{R}^2$, entonces el punto

$$f(u,v) = (u\cos(v), u\operatorname{sen}(v), u) = (x_{\overline{u}}, y_{\overline{u}}, z_{\overline{u}}) \in f(A)$$

cumple que

$$x_{\overline{u}}^2 + y_{\overline{u}}^2 = u^2\cos^2(v) + u^2\ \operatorname{sen}^2(v) = u^2 = z_{\overline{u}}^2,$$

es decir,

$$x_{\overline{u}}^2 + y_{\overline{u}}^2 = z_{\overline{u}}^2.$$

Sea $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. Por lo anterior, $f(u,v) \in B$, es decir, $f(A) \subseteq B$. Afirmamos que $f(A) = B$. Así, nos basta demostrar que $B \subseteq f(A)$. Sea $(x,y,z) \in B$.

Caso 1. Si $z = 0$, como $x^2 + y^2 = z^2$, entonces $x^2 + y^2 = 0$, lo cual implica que $x = 0 = y$, por lo cual proponemos $(u,v) = (0,0) \in A$, que cumple $f(u,v) = (0,0,0) = (x,y,z)$. Así, $(0,0,0) \in f(A)$.

Caso 2. Supongamos que $z \neq 0$. Entonces $\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$. Sabemos que existe $w \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\cos^2(w) = \frac{x^2}{z^2}$ y $\operatorname{sen}^2(w) = \frac{y^2}{z^2}$. Ahora, analicemos todas las posibilidades.

Subcaso 1. Supongamos que $z > 0$. En todas las posibilidades tomaremos $u = z$. Si $\frac{x}{z} > 0$ y $\frac{y}{z} > 0$, entonces $x > 0$ y $y > 0$, por lo cual proponemos $v = w$. Así, $\cos(v) > 0$ y $\operatorname{sen}(v) > 0$ y por lo tanto, $x = u\cos(v)$ y $y = u\operatorname{sen}(v)$. Por anterior obtenemos que $f(u,v) = (x,y,z)$. Ahora, supongamos que $\frac{x}{z} > 0$ y $\frac{y}{z} < 0$. En este caso proponemos $v = w + \frac{3\pi}{2}$. Así, $cos(v) > 0$ y $\operatorname{sen}(v) < 0$, de donde $f(u,v) = (x,y,z)$ como en el caso anterior. Si $\frac{x}{z} < 0$ y $\frac{y}{z} > 0$, proponemos $v = w + \frac{\pi}{2}$ para obtener $\cos(v) < 0$ y $\operatorname{sen}(v) > 0$, lo cual implica que $f(u,v) = (x,y,z)$. Finalmente, si $\frac{x}{z} < 0$ y $\frac{y}{z} < 0$, proponemos $v = w + \pi$ para obtener $\cos(v) < 0$ y $\operatorname{sen}(v) < 0$, de donde se obtiene que $f(u,v) = (x,y,z)$.

Subcaso 2. Supongamos que $z < 0$. Es totalmente análogo al Subcaso 1.

En virtud de los Subcasos 1 y 2, tenemos que cuando $z \neq 0$, existe $(u,v) \in A$ tal que $f(u,v) = (x,y,z)$. En conclusión, $B \subset f(A)$ y por lo tanto se obtiene que $f(A) = B$. En la Figura 2 se da una representación de $f(A)$.

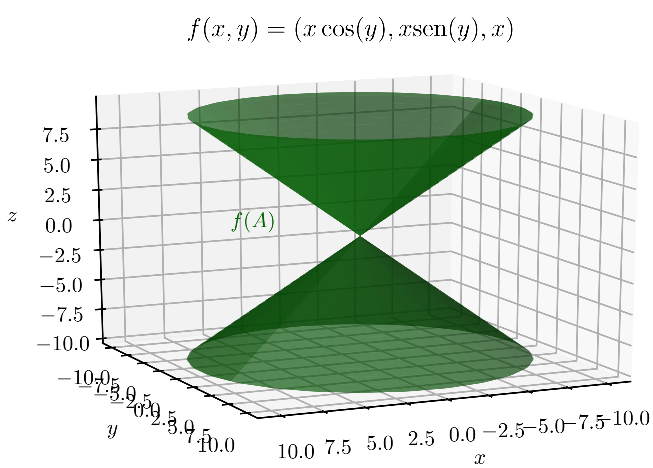

Figura 2: Esbozo de $f(A)$.

■