Ayudantía 12
Gráficas de funciones

Definición 1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función. Definimos la **gráfica de** f, denotada por G_f, como el conjunto

$$G_f = \{(\overline{x}, f(\overline{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \overline{x} \in A\}$$

Es importante notar que la gráfica es, por definición, UN CONJUNTO, así que no se debe confundir este concepto con un *dibujo*. Lo que se debe reconocer, es que en algunos casos es posible hacer una representación gráfica de dicho conjunto en espacios como $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

Pregunta. *¿Qué condiciones se deben cumplir en el dominio y codominio de la función que estamos considerando para que se pueda realizar dicha representación gráfica?*

Ejercicio 2. *Halle la gráfica de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(t) = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))$, *con* $r \geq 0$ *fijo. En caso de ser posible, esboce dicha gráfica.*

Solución. Como se mencionó en la definición anterior, la gráfica es un conjunto muy específico que construiremos a continuación:

$$\begin{aligned} G_f &= \left\{(t, f(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{(t, r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

■

Ejercicio 3. *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Pruebe que para toda* $c \in \mathbb{R}$ *existe* $h : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que* $N_c(f) = N_0(h)$.

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$. Definimos $h : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $h(\overline{x}) = f(\overline{x}) - c$. Entonces

$$\begin{aligned} N_0(h) &= \{\overline{x} \in A \mid h(\overline{x}) = 0\} \\ &= \{\overline{x} \in A \mid f(\overline{x}) - c = 0\} \\ &= \{\overline{x} \in A \mid f(\overline{x}) = c\} \\ &= N_c(f). \end{aligned}$$

■

Ejercicio 4. *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(i). *Pruebe que existe* $H : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ *tal que* $G_f = H(A)$.

(ii). *Pruebe que existe* $h : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ *tal que* $G_f = N_0(h) = h^{-1}(\{0\})$.

Demostración. (i) Definimos $H : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ dada por $H(\overline{x}) = (\overline{x}, f(\overline{x}))$. Veamos que $G_f = H(A)$. Para ello, si $(\overline{x}, \overline{y}) \in G_f$, entonces $\overline{y} = f(\overline{x})$, lo cual,

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, f(\overline{x})) = H(\overline{x}) \in H(A).$$

Lo anterior implica que $G_f \subset H(A)$. Recíprocamente, si $(\overline{x}, \overline{y}) \in H(A)$, entonces existe $\overline{z} \in A$ tal que $H(\overline{z}) = (\overline{x}, \overline{y})$, es decir, $(\overline{z}, f(\overline{z})) = (\overline{x}, \overline{y})$, esto es, $(\overline{x}, \overline{y}) \in G_f$ por definición de gráfica de una función. Esto implica que $H(A) \subset G_f$.

(ii) Definimos $h : A \times f(A) \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ dada por $h(\overline{x}, \overline{y}) = \|f(\overline{x}) - \overline{y}\|$. Afirmamos que $G_f = h^{-1}(\{0\})$. Para esto, notamos que $(\overline{x}, \overline{y}) \in h^{-1}(\{0\})$ sí y sólo si $h(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, es decir, $\|f(\overline{x}) - \overline{y}\| = 0$, lo cual ocurre sí y sólo si $f(\overline{x}) = \overline{y}$ (por las propiedades de norma), lo cual sucede sí y sólo si $(\overline{x}, \overline{y}) \in G_f$. ∎