Ayudantía 13
Límites de sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 1. *Determine cuáles de las siguientes sucesiones convergen y cuál es su punto de convergencia (cuando exista).*

(i). $\{\overline{x}_k\} = \left\{\left(k\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{k}\right), \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)\right\}$.

(ii). $\{\overline{x}_k\} = \left\{\left(\frac{\mathrm{sen}(k)}{k}, \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)\right\}$.

(iii). $\{\overline{x}_k\} = \left\{\left(\left(a^k+b^k\right)^{\frac{1}{k}}, kc^k, (-1)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)\right\}$.

(iv). $\{\overline{x}_k\} = \left\{\left(\left(k^2+1\right)^{\frac{1}{8}} - (k+1)^{\frac{1}{4}}, \frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k}\right)\right\}$.

Demostración. Ya que trabajaremos con sucesiones en $\mathbb{R}^n$, para determinar si son convergentes o no utilizaremos la **Proposición 8** de la **Clase 16**, que Oscar resumió como "una sucesión es convergente si y sólo si cada una de las sucesiones coordenadas es convergente".

(i) Analicemos cada una de las sucesiones coordenadas. Por un lado sabemos que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 1$, y como $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ y $\frac{1}{k} > 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} = 1$, es decir, $\lim\limits_{k\to\infty} k\,\mathrm{sen}(\frac{1}{k}) = 1$, por lo cual la primera sucesión coordenada converge. Por otro lado, como $\lim\limits_{k\to\infty} (1+\frac{1}{k})^k = e$, entonces la segunda sucesión coordenada converge. En conclusión, $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{x}_k = (1, e)$.

(ii) Analicemos las dos sucesiones coordenadas. Ya que $-1 \leq \mathrm{sen}(x) \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$, se cumple que para toda $k \in \mathbb{N}$ se tiene la desigualdad

$$-\frac{1}{k} \leq \frac{\mathrm{sen}(k)}{k} \leq \frac{1}{k}.$$

Ya que

$$\lim_{k\to\infty} (-\frac{1}{k}) = 0 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k},$$

por el Teorema de minorantes y mayorantes obtenemos que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(k)}{k} = 0$. Por lo tanto la primera sucesión coordenada es convergente. Ahora, como $\lim\limits_{k\to\infty} (1+\frac{1}{k})^k = e$, entonces la segunda sucesión coordenada converge. En conclusión, $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{x}_k = (0, e)$.

(iii) Notamos que la sucesión $\{(-1)^k(1+\frac{1}{k})\}$ no es convergente ya que, por un lado, la subsucesión de términos pares cumple que

$$\lim_{l\to\infty} (-1)^{2l}(1+\frac{1}{2l}) = \lim_{l\to\infty} (1+\frac{1}{2l}) = 1,$$

y, por otro lado, la subsucesión de términos impares satisface que

$$\lim_{l\to\infty} (-1)^{2l-1}(1+\frac{1}{2l-1}) = \lim_{l\to\infty} (-1)(1+\frac{1}{2l-1}) = -1.$$

Así, ya que una de las sucesiones coordenadas no converge, entonces $\{\overline{x}_k\}$ no es convergente.

(iv) Analicemos las sucesiones coordenadas. En primer lugar notamos que para toda $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
(k^2+1)^{\frac{1}{8}} - (k+1)^{\frac{1}{4}} &= \frac{(k^2+1)^{\frac{1}{4}} - (k+1)^{\frac{1}{2}}}{(k^2+1)^{\frac{1}{8}} + (k+1)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{(k^2+1)^{\frac{1}{2}} - (k+1)}{((k^2+1)^{\frac{1}{8}} + (k+1)^{\frac{1}{4}})((k^2+1)^{\frac{1}{4}} + (k+1)^{\frac{1}{2}})} \\
&= \frac{(k^2+1) - (k+1)^2}{((k^2+1)^{\frac{1}{8}} + (k+1)^{\frac{1}{4}})((k^2+1)^{\frac{1}{4}} + (k+1)^{\frac{1}{2}})((k^2+1)^{\frac{1}{2}} + (k+1))} \\
&= \frac{k^2+1-k^2-2k-1}{((k^2+1)^{\frac{1}{8}} + (k+1)^{\frac{1}{4}})((k^2+1)^{\frac{1}{4}} + (k+1)^{\frac{1}{2}})((k^2+1)^{\frac{1}{2}} + (k+1))} \\
&= \frac{-2k}{((k^2+1)^{\frac{1}{8}} + (k+1)^{\frac{1}{4}})((k^2+1)^{\frac{1}{4}} + (k+1)^{\frac{1}{2}})((k^2+1)^{\frac{1}{2}} + (k+1))} \\
&= \frac{-2}{((k^2+1)^{\frac{1}{8}} + (k+1)^{\frac{1}{4}})((k^2+1)^{\frac{1}{4}} + (k+1)^{\frac{1}{2}})((1+\frac{1}{k^2})^{\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{k}))},
\end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}((k^2+1)^{\frac{1}{8}} - (k+1)^{\frac{1}{4}}) &= \lim_{k\to\infty} \frac{-2}{((k^2+1)^{\frac{1}{8}} + (k+1)^{\frac{1}{4}})((k^2+1)^{\frac{1}{4}} + (k+1)^{\frac{1}{2}})((1+\frac{1}{k^2})^{\frac{1}{2}} + (1+\frac{1}{k}))} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera sucesión coordenada converge a 0. A continuación, la segunda sucesión coordenada cumple que

$$\frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k} = \frac{k^2-(k+1)^2}{k(k+1)} = \frac{-2k-1}{k(k+1)} = \frac{-2-\frac{1}{k}}{k+1},$$

por lo cual

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{-2-\frac{1}{k}}{k+1} = 0.$$

Por lo tanto, la segunda sucesión coordenada converge a 0. En conclusión, $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{x}_k = (0,0)$. ∎

Ejercicio 2. *Pruebe que la sucesión $\{\overline{x}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ converge al punto $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ sí y sólo si la sucesión de números reales $\{\|\overline{x}_k - \overline{x}_0\|\}$ converge a 0.*

Demostración. Supongamos que $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}_0$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_0$ entonces $\|\overline{x}_k - \overline{x}_0\| < \varepsilon$. Ahora, ya que

$$|\|\overline{x}_k - \overline{x}_0\| - 0| = \|\overline{x}_k - \overline{x}_0\|, \tag{1}$$

se obtiene que para $N = N_0$ se cumple que si $k \geq N$, entonces $|\|\overline{x}_k - \overline{x}_0\| - 0| < \varepsilon$ por la ecuación (1). Por lo tanto, $\lim\limits_{k\to\infty} \|\overline{x}_k - \overline{x}_0\| = 0$.

Ahora, supongamos que $\lim\limits_{k\to\infty} \|\overline{x}_k - \overline{x}_0\|$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_1$, entonces $|\|\overline{x}_k - \overline{x}_0\| - 0| < \varepsilon$. En virtud de la ecuación (1), si $N = N_1$, entonces para toda $k \geq N$ se satisface que $\|\overline{x}_k - \overline{x}_0\| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}_0$. ∎

Ejercicio 3. *Sea $\{\overline{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ que converge al punto $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que la sucesión de números reales $\{\|\overline{x}_k\|\}$ converge a $\|\overline{x}_0\|$. ¿Es cierto el resultado recíproco para cualquier $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$?*

Demostración. Supongamos que $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}_0$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_0$, entonces $\|\overline{x}_k - \overline{x}_0\| < \varepsilon$. Como para toda $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\big|\|\overline{x}_k\| - \|\overline{x}_0\|\big| \leq \|\overline{x}_k - \overline{x}_0\|,$$

al tomar $N = N_0$ obtenemos que si $k \geq N$, entonces $\big|\|\overline{x}_k\| - \|\overline{x}_0\|\big| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim_{k\to\infty} \|\overline{x}_k\| = \|\overline{x}_0\|$.

Note que el recíproco es FALSO. Basta considerar la sucesión $\{x_k\} = \{(-1)^k\}$, ya que $\lim_{k\to\infty} |x_k| = 1$ pero la sucesión $\{x_k\}$ no converge. ∎