Ayudantía 14
Sucesiones y puntos de acumulación

Comenzamos esta sesión recordando el siguiente resultado demostrado por Oscar en la **Clase 17**:

Lema 15 (Clase 17). Sean $\{\overline{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y $A = R(\{\overline{x}_k\})$. Si $A' \neq \varnothing$ y $\overline{\ell} \in A'$, entonces existe una subsucesión $\{\overline{x}_{k_l}\}$ de $\{\overline{x}_k\}$ tal que $\{\overline{x}_{k_l}\}$ converge a $\overline{\ell}$. ■

Notamos que el resultado anterior tiene como hipótesis implícita que A es infinito, ¿por qué no podría ser finito? La razón es que el conjunto de puntos de acumulación de un conjunto finito siempre es vacío (demuéstrelo). El siguiente resultado es una continuación del lema anterior.

Lema 1. *Sea $\{\overline{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y supongamos que $A = R(\{\overline{x}_k\})$ es infinito. Si $\{\overline{x}_k\}$ converge a $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $\overline{x}_0$ es el único punto de acumulación de A.*

Demostración. Supongamos que $\{\overline{x}_k\}$ converge a $\overline{x}_0$. En primer lugar veamos que $\overline{x}_0 \in A'$. Sea $r > 0$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $\|\overline{x}_k - \overline{x}_0\| < r$. Lo anterior implica que $\dot{B}_r(\overline{x}_0) \cap A \neq \varnothing$ porque en caso contrario la sucesión debería ser constante salvo una cantidad finita de términos y esto contradiría la hipótesis de que A es infinito. Por lo tanto, $\overline{x}_0 \in A'$.

Veamos que $A' = \{\overline{x}_0\}$. Procedemos por contradicción. Supongamos que existe $\overline{y} \in A'$ con $\overline{y} \neq \overline{x}_0$. Por el **Lema 15** de la **Clase 17** mencionado al principio, existe una subsucesión $\{\overline{x}_{k_l}\}$ de $\{\overline{x}_k\}$ que converge a $\overline{y}$, lo cual contradice que cualquier subsucesión de $\{\overline{x}_k\}$ debe converger a $\overline{x}_0$. Por lo tanto, $\overline{y} = \overline{x}_0$, es decir, $A' = \{\overline{x}_0\}$. ■

De manera natural se podría pensar que el resultado anterior admite un recíproco, sin embargo no es así como veremos a continuación.

Ejercicio 2. *Existe una sucesión $\{\overline{x}_k\}$ con rango $A = R(\{\overline{x}_k\})$ infinito tal que A tiene un único punto de acumulación y $\{\overline{x}_k\}$ NO es convergente.*

Demostración. Consideremos la sucesión $\{x_k\}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } k \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Tenemos que $A = R(\{x_k\}) = \left\{ \frac{1}{k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$ es infinito. Además, 0 es el único punto de acumulación de A pero la sucesión $\{x_k\}$ no es convergente. ■

Lema 3. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Se cumple lo siguiente:*

(i). $\overline{x}_0 \in A'$ *sí y sólo si existe una sucesión* $\{\overline{x}_k\}$ *en* $A \setminus \{\overline{x}_0\}$ *tal que* $\{\overline{x}_k\}$ *converge a* $\overline{x}_0$.

(ii). $\overline{x}_0 \in \overline{A}$ *sí y sólo si existe una sucesión* $\{\overline{x}_k\}$ *en* A *tal que* $\{\overline{x}_k\}$ *converge a* $\overline{x}_0$.

(iii). *Si* $\overline{x}_0$ *es un punto aislado de* A *y* $\{\overline{x}_k\}$ *es una sucesión en* A *que converge a* $\overline{x}_0$, *entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\overline{x}_k = \overline{x}_0$ *para toda* $k \geq N$.

Demostración. (i) Primero supongamos que $\overline{x}_0 \in A'$. Usamos que $\overline{x}_0$ es un punto de acumulación para construir inductivamente una sucesión que cumpla lo deseado:

- Para $k = 1$, tenemos que $\dot{B}_1(\overline{x}_0) \cap A \neq \varnothing$, por lo cual existe $\overline{x}_1 \in \dot{B}_1(\overline{x}_0) \cap A$. En particular, $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_0$ y $\overline{x}_1 \in A$.
- Supongamos que para $k \in \mathbb{N}$ fijo hemos construido $\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\}$ todos distintos de $\overline{x}_0$. Para $k+1$ construimos $\overline{x}_{k+1}$ como sigue: ya que $\dot{B}_{1/(k+1)}(\overline{x}_0) \cap A$ es no vacío y es un conjunto infinito, entonces $\left(\dot{B}_{1/(k+1)}(\overline{x}_0) \cap A\right) \setminus \{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\} \neq \varnothing$, por lo cual tomamos $\overline{x}_{k+1} \in \left(\dot{B}_{1/(k+1)}(\overline{x}_0) \cap A\right) \setminus \{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\}$. Así, $\overline{x}_{k+1} \neq \overline{x}_0$ y $\overline{x}_{k+1} \in A$. Esto termina la construcción de la sucesión.

Afirmación. La sucesión $\{\overline{x}_k\}$ converge a $\overline{x}_0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon \geq 1$, entonces $\|\overline{x}_k - \overline{x}_0\| < 1 \leq \varepsilon$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\varepsilon < 1$. Por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Luego, si $k \geq N$ entonces se cumple que $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$, así que

$$\|\overline{x}_k - \overline{x}_0\| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\{\overline{x}_k\}$ converge a $\overline{x}_0$. Además, por construcción se cumple que $\overline{x}_k \neq \overline{x}_0$ para toda $k \in \mathbb{N}$ como se deseaba. Esto prueba la primera implicación.

Para la implicación recíproca procedemos por contrapositiva. Supongamos que si $\overline{x}_0 \notin A'$, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\dot{B}_{\varepsilon_0}(\overline{x}_0) \cap A = \varnothing$. Notamos que si $\overline{x}_0 \in A$, entonces $\overline{x}_0$ debe ser un punto aislado, y entonces no es posible construir una sucesión contenida en A formada por puntos distintos de $\overline{x}_0$ que converja a $\overline{x}_0$. Así, supongamos adicionalmente que $\overline{x}_0 \notin A$. Entonces $B_{\varepsilon_0}(\overline{x}_0) \subset A^{\complement}$. Ahora, si $\{\overline{x}_k\}$ es una sucesión contenida en A, entonces $\overline{x}_k \neq \overline{x}_0$ para toda $k \in \mathbb{N}$, sin embargo, para toda $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $\|\overline{x}_k - \overline{x}_0\| \geq \varepsilon_0$, ya que en caso contrario existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{x}_{k_0} \in B_{\varepsilon_0}(\overline{x}_0) \subset A^{\complement}$, es decir, $\overline{x}_{k_0} \in A \cap A^{\complement} = \varnothing$, lo cual es un absurdo. Lo anterior implica que $\{\overline{x}_k\}$ NO converge a $\overline{x}_0$. Esto prueba que cualquier sucesión contenida en A no converge a $\overline{x}_0$. Esto termina la prueba.

(ii) Para la primera implicación notemos que si $\overline{x}_0 \in \overline{A}$, entonces $\overline{x}_0 \in A \cup A'$. Si $\overline{x}_0 \in A$, basta tomar la sucesión constante $\{\overline{x}_k\}$ donde $\overline{x}_k = \overline{x}_0$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Si $\overline{x}_0 \in A'$, el resultado se sigue del inciso (i) anterior.

Para la implicación recíproca nuevamente procedemos por contrapositiva. Supongamos que $\overline{x}_0 \notin \overline{A}$. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_0}(\overline{x}_0) \cap A = \varnothing$, lo cual implica que $B_{\varepsilon_0}(\overline{x}_0) \subseteq A$. A partir de aquí repetimos la prueba realizada en el inciso anterior. Esto termina la demostración.

(iii) Supongamos que $\overline{x}_0$ un punto aislado de A. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_0}(\overline{x}_0) \cap A = \{\overline{x}_0\}$. Como $\{\overline{x}_k\}$ es una sucesión contenida en A que converge a $\overline{x}_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$ entonces $\|\overline{x}_k - \overline{x}_0\| < \varepsilon_0$. Así, $\overline{x}_k \in B_{\varepsilon_0}(\overline{x}_0) \cap A = \{\overline{x}_0\}$ para toda $k \geq N$, por lo cual, para toda $k \geq N$ se cumple que $\overline{x}_k = \overline{x}_0$. Esto termina la prueba. ∎