Ayudantía 15
Ejemplos de límites de funciones

Ejercicio 1. *Determine si las siguientes funciones tienen límite en el punto que se indica. Pruebe su respuesta.*

(i). $f(x,y) = \dfrac{x^3 + xy^2 - x^2y - y^3}{x^2 + y^2}$ *en* $(0,0)$.

(ii). $f(x,y) = \dfrac{x^2(y-1)}{x^4 + (y-1)^2}$ *en* $(0,1)$.

(iii). $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$ *en* $(0,0)$.

(iv). $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$ *en* $(0,0)$.

Solución. (i) En este caso notamos que si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^3 + xy^2 - xy^2 - y^3}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2(x-y) + y^2(x-y)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(x-y)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \\ &= x - y, \end{aligned} \tag{1}$$

es decir, para $(x,y) \neq (0,0)$ se cumple que $f(x,y) = x - y$. Este resultado motiva lo siguiente.

Afirmación. Se cumple que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Para demostrar la afirmación usaremos la definición de límite. Por ello, sea $\varepsilon > 0$. Proponemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Así, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cumple que $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$, entonces $(x,y) \neq (0,0)$ y también

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leq \|(x,y)\| + \|(x,y)\| = 2\|(x,y)\| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

así que a partir de la ecuación (1) se obtiene que

$$|f(x,y) - 0| \leq |x - y| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, por definición, se cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + xy^2 - x^2y - y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

(ii) En este caso intentaremos aproximarnos al punto $(0,1)$ mediante sucesiones. Recordemos que la **Proposición 4** de la **Clase 18** nos asegura la equivalencia entre límites de funciones y límites de sucesiones. Aunque la primera idea suele ser el aproximarse mediante sucesiones que "están" sobre líneas paralelas a los ejes coordenados, en esta ocasión nos aproximaremos por otro tipo de "trayectorias" (más tarde se formalizará este concepto para que pueda ser utilizado para probar que ciertos límites no existen).

Por un lado tenemos que la sucesión $\{a_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n}\ ,\ 1+\frac{1}{n}\right)\right\}$ converge a $(0,1)$ y además, ya que $f(x,y) = \dfrac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(a_n) &= \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}-1\right)}{\frac{1}{n^4}+\left(1+\frac{1}{n}-1\right)^2}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así, en este caso tenemos que la sucesión $\{a_n\}$ converge a $(0,1)$ y la sucesión de imágenes $\{f(a_n)\}$ converge a 0.

Por otro lado, la sucesión $\{b_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n^2}\right)\right\}$ también converge a $(0,1)$, pero la sucesión de imágenes $\{f(b_n)\}$ cumple que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(b_n) &= \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}-1\right)}{\frac{1}{n^4}+\left(1+\frac{1}{n^2}-1\right)^2}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces, la sucesión $\{b_n\}$ converge a $(0,1)$ y la sucesión $\{f(b_n)\}$ converge a $\frac{1}{2}$.

En virtud de lo anterior, hemos encontrado dos sucesiones que convergen a $(0,1)$, pero tales que sus sucesiones de imágenes convergen a distintos valores, por lo cual, usando la equivalencia entre límites de funciones y límites de sucesiones (**Proposición 4** de la **Clase 18**), concluimos que el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,1)$ NO existe.

(iii) Procedemos de manera similar al inciso (ii) anterior. En primer lugar, consideremos la sucesión $\{a_n\} = \left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$. Tenemos que $\{a_n\}$ converge a $(0,0)$. Ahora, ya que $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$, su sucesión de imágenes $\{f(a_n)\}$ cumple que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(0, \frac{1}{n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{0\cdot \frac{1}{n^3}}{0+\frac{1}{n^6}} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Así, la sucesión $\{a_n\}$ converge a $(0,0)$, mientras que la sucesión de imágenes $\{f(a_n)\}$ converge a 0.

Por otro lado, la sucesión $\{b_n\} = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right\}$ también converge a $(0,0)$, pero la sucesión de imágenes $\{f(b_n)\}$ satisface lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(b_n) &= \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{2\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Entonces, la sucesión $\{b_n\}$ converge a $(0,0)$, mientras que la sucesión de imágenes $\{f(b_n)\}$ converge a $\frac{1}{2}$.

En virtud de lo anterior, hemos encontrado dos sucesiones que convergen a $(0,0)$, pero tales que sus sucesiones de imágenes convergen a distintos valores, por lo cual, usando la equivalencia entre límites de funciones y límites de sucesiones (**Proposición 4** de la **Clase 18**), concluimos que el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ NO existe.

(iv) Afirmamos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Proponemos $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Tenemos que si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ cumple que $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$, entonces $(x,y)\neq(0,0)$ y, en particular, $0<\|(x,y)\|<1$, de donde $\|(x,y)\|^2<1$. Ya que $|x|,\ |y| \leq \|(x,y)\|$, también se tiene que $|x|,\ |y| < \frac{\varepsilon}{2}$ y que $|y|<1$.

A partir de lo anterior se obtiene que

$$|x^3| = |x|\ |x^2| < \frac{\varepsilon}{2}\ \|(x,y)\|^2$$

y también que

$$|y^4| = |y|\ |y|\ |y^2| < \frac{\varepsilon}{2}\|(x,y)\|^2.$$

Luego, se cumple que

$$|x^3+y^4| \leq |x^3| + |y^4| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|(x,y)\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|(x,y)\|^2 = \varepsilon\|(x,y)\|^2. \tag{2}$$

Así, a partir de (2) se obtiene que

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^3+y^4|}{\|(x,y)\|^2} < \frac{1}{\|(x,y)\|^2}\cdot\varepsilon\|(x,y)\|^2 = \varepsilon.$$

Por lo tanto, por definición de límite, se cumple que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. ■

Ejercicio 2. *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\overline{x}_0 \in A'$. Pruebe que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \overline{0}$ si y sólo si $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \|f(\overline{x})\| = 0$.*

Demostración. En primer lugar supongamos que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \overline{0}$. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de límite existe $\delta > 0$ tal que si $\overline{x} \in \dot{B}_\delta(\overline{x}_0)$, entonces $\|f(\overline{x}) - \overline{0}\| < \varepsilon$. Ya que

$$\big|\|f(\overline{x})\| - 0\big| = \|f(\overline{x})\|,$$

se concluye que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \|f(\overline{x})\| = 0$.

Supongamos ahora que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \|f(\overline{x})\| = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por la hipótesis se cumple que existe $\delta > 0$ tal que si $\overline{x} \in \dot{B}_\delta(\overline{x}_0)$ entonces $|\ \|f(\overline{x})\| - 0\ | < \varepsilon$, lo cual implica que

$$\|f(\overline{x}) - \overline{0}\| = \|f(\overline{x})\| = |\ \|f(\overline{x})\| - 0\ | < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \overline{0}$. ∎

Lema 3. *Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\overline{x}_0 \in A'$. Si g está acotada en una vecindad* agujerada *de $\overline{x}_0$, es decir, existen $r > 0$ y $M > 0$ tales que $\|g(\overline{x})\| \leq M$ para toda $\overline{x} \in (B_r(\overline{x_0}) \cap A)$, y $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \overline{0}$, entonces $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} (g \cdot f)(\overline{x}) = 0$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la hipótesis existen $r > 0$ y $M > 0$ tales que si $\overline{x} \in \dot{B}_r(\overline{x}_0) \cap A$, entonces $\|g(\overline{x})\| \leq M$. Como $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \overline{0}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\overline{x} \in \dot{B}_{\delta_1}(\overline{x}_0) \cap A$, entonces

$$\|f(\overline{x})\| = \|f(\overline{x}) - \overline{0}\| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Luego, si $\delta = \text{mín}\{\delta_1, r\}$, para cualquier $\overline{x} \in \dot{B}_\delta(\overline{x}_0) \cap A$ se cumple, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que

$$|(f \cdot g)(\overline{x}) - 0| = |f(\overline{x}) \cdot g(\overline{x})| \leq \|f(\overline{x})\|\ \|g(\overline{x})\| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Esto prueba lo deseado. ∎