Ayudantía 16
Un límite auxiliar y límite iterado

Lema 1. *Sean* $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\overline{x}_0 \in A'$ *y* $k \in \mathbb{N}$. *Si*

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \frac{\|f(\overline{x}) - g(\overline{x})\|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^k} = 0,$$

entonces para toda $s \in \mathbb{Z}$ *tal que* $s \leq k$ *se cumple que*

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \frac{\|f(\overline{x}) - g(\overline{x})\|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^s} = 0.$$

Demostración. La prueba se hará utilizando la definición de límite. Para ello, sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis se cumple que existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\overline{x} \in \dot{B}_{\delta_1}(\overline{x}_0) \cap A$, entonces

$$\frac{\|f(\overline{x}) - g(\overline{x})\|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^k} = \left| \frac{\|f(\overline{x}) - g(\overline{x})\|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^k} - 0 \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

A partir de la desigualdad (1) obtenemos que

$$\|f(\overline{x}) - g(\overline{x})\| < \varepsilon \|\overline{x} - \overline{x}_0\|^k. \tag{2}$$

Para continuar, proponemos $\delta = \text{mín}\{1, \delta_1\}$. Ahora, consideremos $\overline{x} \in \dot{B}_\delta(\overline{x}_0)$, y notenemos que hay dos casos respecto al valor de s:

Caso 1: Supongamos que $0 \leq s \leq k$. Como el caso $s = k$ se cumple por hipótesis, podemos suponer que $s < k$. Notamos que a partir de (2) se obtiene que

$$\frac{\|f(\overline{x}) - g(\overline{x})\|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^s} < \varepsilon \|\overline{x} - \overline{x}_0\|^{k-s} < \varepsilon,$$

porque $\|\overline{x} - \overline{x}_0\| < \delta \leq 1$. Esto prueba este caso.

Caso 2: Supongamos que $s < 0$. Entonces $\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^{-s} < 1$ porque $\|\overline{x} - \overline{x}_0\| < \delta \leq 1$ y $-s > 0$. Ya que a partir de (2) se obtiene que en este caso $\|f(\overline{x}) - g(\overline{x})\| < \varepsilon$, entonces

$$\frac{\|f(\overline{x}) - g(\overline{x})\|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|^s} = \|f(\overline{x}) - g(\overline{x})\| \; \|\overline{x} - \overline{x}_0\|^{-s} < \varepsilon.$$

En ambos casos se obtiene el límite deseado. Esto termina la prueba. ■

Ejercicio 2. *Sean* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\overline{x}_0 = (x_0, y_0)$ *y* $r > 0$ *tales que*

(i). (x, y_0), $(x_0, y) \in A'$ *para cualesquiera* $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ *y* $y \in (y_0 - r, y_0 + r)$,

(ii). $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$, *y*

(iii). $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x, y) = g(y)$ *para cada* $y \in (y_0 - r, y_0 + r)$.

Pruebe que

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell.$$

Este límite se conoce como límite iterado *porque* $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = \lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$.

Demostración. Notamos que la hipótesis (i) es necesaria para que las hipótesis (ii) y (iii) tengan sentido: el límite de una función se define en puntos de acumulación del dominio. Asimismo, para cada $y \in (y_0 - r, y_0 + r)$ se utiliza $g(y)$ para denotar el límite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, lo cual define una función $g : (y_0 - r, y_0 + r) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para la cual nos interesa calcular su límite en y_0.

Así, usaremos la definición de límite. Para ello, sea $\varepsilon > 0$. Notemos que a partir de la hipótesis (ii) existe $\delta_0 > 0$ tal que si $(x,y) \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta_0) \cap A$ y $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_0$, entonces $|f(x,y) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Notamos que en particular, si $\delta = \delta_0$ se cumple lo anterior y también para toda $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ se satisface que

$$0 < |y - y_0| \leq \|(x,y) - (x, x_0)\| < \delta,$$

lo cual implica que $|f(x,y) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora, para tales si $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, se cumple que

$$g(y) - \ell = \lim_{x\to x_0} f(x,y) - \ell = \lim_{x\to x_0} \left(f(x,y) - \ell\right),$$

y ya que la función valor absoluto es continua en $\mathbb{R}$, en particular es continua en $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x,y) - \ell)$, por lo cual podemos aplicar el siguiente resultado:

Lema. *Sean $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones con I y J intervalos. Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ existe y f es continua en $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right).$$

Entonces, si $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, se cumple que

$$\begin{aligned}
|g(y) - \ell| &= \left|\lim_{x\to x_0} (f(x,y) - \ell)\right| \\
&= \lim_{x\to x_0} |f(x,y) - \ell| \\
&\leq \lim_{x\to x_0} \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se obtiene a partir del Lema y la primera desigualdad se cumple por la monotonía del límite.

En conclusión, por definición, $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = \ell$. Esto termina la prueba. ∎