Ayudantía 17
Ejemplos de funciones continuas

Ejercicio 1. *Pruebe que la función* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y,z)=\operatorname{sen}(x^2-yz)$ *es continua en* $\mathbb{R}^3$.

Demostración. Consideremos las funciones π_1, π_2, $\pi_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definidas por $\pi_1(x,y,z)=x^2$, $\pi_2(x,y,z)=y$ y $\pi_3(x,y,z)=z$. Tenemos que π_1, π_2 y π_3 son continuas en $\mathbb{R}^3$, de donde se sigue que $(\pi_1-\pi_2\pi_2)(x,y,z)=x^2-yz$ también es continua en $\mathbb{R}^3$ (vea la **Proposición 7** de la **Clase 20**). Ahora, la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(t)=\operatorname{sen}(t)$ es continua en $\mathbb{R}$ y se cumple que $g\circ(\pi_1-\pi_2\pi_3):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ está dada por

$$\begin{aligned}(g\circ(\pi_1-\pi_2\pi_3))(x,y,z)&=g((\pi_1-\pi_2\pi_3)(x,y,z))\\&=g(x^2-yz)\\&=\sin(x^2-yz)\\&=f(x,y,z)\end{aligned}$$

y por la **Proposición 8** de la **Clase 20** obtenemos que la composición de funciones es continua (en $\mathbb{R}^3$), así que por la igualdad anterior se cumple que f es continua en $\mathbb{R}^3$. Esto termina la prueba. ■

Ejercicio 2. *Determine si la función* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6}{(x^2-y)^2+x^6} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es continua en $(0,0)$.

Demostración. Ya que $(0,0)$ no es un punto aislado de $\mathbb{R}^2$, por la **Proposición 4** de la **Clase 20**, si f es continua en $(0,0)$ debe cumplirse que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=0$.

Ahora, consideremos la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $g(t)=(t,t^2)$. Tenemos que g es continua en $\mathbb{R}$ y $g(0)=(0,0)$, así, g es continua en $(0,0)$. Si f fuera continua en $(0,0)$, por la **Proposición 7** de la **Clase 21** debe cumplirse que $\lim\limits_{t\to0}(f\circ g)(t)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=0$. Sin embargo, si $t\neq0$ se cumple que

$$(f\circ g)(t)=f(t,t^2)=\frac{t^6}{(t^2-t^2)^2+t^6}=\frac{t^6}{t^6}=1,$$

lo cual implica que $\lim\limits_{t\to0}(f\circ g)(t)=\lim\limits_{t\to0}1=1\neq0$. Por lo tanto, f no es continua en $(0,0)$. ■

Ejercicio 3. *Sea* $k\in\mathbb{R}$. *Considere la función* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ k & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(i). Halle, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

(ii). ¿Es posible elegir $k \in \mathbb{R}$ tal que f sea continua en $(0,0)$?

Demostración. (i) Consideremos las funciones $g, h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definidas por $g(x,y) = \operatorname{sen}(y)$ y $h(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+y^2}$. Notamos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$. Por otro lado, si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces

$$0 \leq \left|\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+y^2}\right| = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+y^2} \leq \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2},$$

y ya que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, se tiene que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} = 1$, lo cual implica que para $1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-0| < \delta_0$ entonces $\left|\dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} - 1\right| < 1$, lo cual implica que $-1 < \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} - 1 < 1$, es decir, $0 < \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} < 2$. Lo anterior implica que si $\delta = \delta_0$, se cumple que $|h(x,y)| \leq 2$ para toda $(x,y) \in \dot{B}_\delta(0,0)$, esto es, h es acotada en una vecindad de $(0,0)$. Así, por el **Lema 3** de la **Ayudantía 15** se concluye que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (g \cdot h)(x,y) = 0,$$

y ya que $(g\cdot h)(x,y) = \operatorname{sen}(y) \cdot \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+y^2} = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2} = f(x,y)$ para toda $(x,y) \neq (0,0)$, se concluye que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

(ii) Ya que $(0,0)$ es un punto de acumulación de $\mathbb{R}^2$, en virtud de la **Proposición 4** de la **Clase 20** debe cumplirse que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Ya que $f(0,0) = k$ y en el inciso (i) vimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, basta elegir $k = 0$ para asegurar la continuidad de f en $(0,0)$. De hecho, en virtud de la misma proposición se puede asegurar que es la única elección posible. ∎

Lema 4. *Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\overline{x}_0 \in U$, $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(U) \subseteq (a,b)$ y $g : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en $f(\overline{x}_0)$. Definimos $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como*

$$\varphi(\overline{x}) = \begin{cases} \dfrac{g(f(\overline{x})) - g(f(\overline{x}_0))}{f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0)} & \text{si } f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) \neq 0, \\[2ex] g'(f(\overline{x}_0)) & \text{si } f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) = 0. \end{cases}$$

Si f es una función continua en $\overline{x}_0$, entonces φ es continua en $\overline{x}_0$.

Demostración. La prueba se hará utilizando la definición de límite. Sea $\varepsilon > 0$. Denotemos $y_0 = f(\overline{x}_0)$. Como g es derivable en y_0, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|y - y_0| < \delta_1$ entonces

$$\left|\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0)\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Ya que f es continua en $\overline{x}_0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que si $\overline{x} \in B_{\delta_0}(\overline{x}_0) \cap U$ entonces $|f(\overline{x}) - y_0| < \delta_1$. Proponemos $\delta = \delta_0$. Si $\overline{x} \in B_\delta(\overline{x}_0) \cap U$, entonces $|f(\overline{x}) - y_0| < \delta_1$, y obtenemos dos casos:

Caso 1: Si $f(\overline{x}) = y_0$, entonces $\varphi(\overline{x}) = g'(f(\overline{x}_0))$ y, por lo tanto,

$$|\varphi(\overline{x}) - \varphi(\overline{x}_0)| = 0 < \varepsilon.$$

Caso 2: Si $f(\overline{x}) \neq y_0$, entonces por la ecuación (1) obtenemos que

$$|\varphi(\overline{x}) - \varphi(\overline{x}_0)| = \left| \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0) \right| < \varepsilon.$$

A partir de los Casos 1 y 2 concluimos que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \varphi(\overline{x}) = g'(f(\overline{x}_0)) = \varphi(\overline{x}_0)$. Esto prueba lo deseado. ■