Ayudantía 18
Continuidad, conexidad y conjuntos cerrados y acotados

Continuidad y conexidad

Recordemos el siguiente resultado demostrado por Oscar en una de las últimas sesiones.

Teorema 4 (Clase 22). Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq A$ y $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua en A. Si B es conexo, entonces $f(B)$ es conexo.

En primer lugar, ganemos un poco de intuición respecto al uso del **Teorema 4 (Clase 22)**.

Ejemplo 1. Sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mediante $f(x, y) = (x, a, y)$. Notamos que f es continua y como $\mathbb{R}^2$ es un conjunto conexo, entonces $f(\mathbb{R}^2)$ es conexo en virtud del Teorema 4 (Clase 22). Note que $f(\mathbb{R}^2)$ es un plano paralelo al plano XZ ya que $y = a$ es fijo. ■

Para continuar la ganancia de intuición, notemos que hay dos preguntas naturales acerca de este tema:

(i). Si la función no es continua en su dominio, ¿la imagen ya no es conexa?

(ii). Si el dominio no es conexo, ¿su imagen bajo una función puede ser conexa?

Ejemplo 2. Sea $A = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$. Consideremos $f : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Notamos que f no es continua en 0 porque $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$. Por otro lado, es claro que $f(A) = [0, \infty)$. Así, $f(A)$ es conexo aunque f no es continua en A. ■

Así, el Ejemplo 2 nos muestra que aunque la función no sea continua, la imagen de un conjunto conexo puede ser conexa. Esto responde la Pregunta (i).

Ejemplo 3. Sea $A = [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}$. Definimos $f : A \to \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{si } t \in [0, 1], \\ (0, t - 2) & \text{si } t \in [2, 3]. \end{cases}$$

Notamos que A no es un conjunto conexo porque no es un intervalo, así, no podemos aplicar el Teorema 4 (Clase 22), por lo cual debemos analizar $f(A)$ para determinar si es conexo o no. De hecho, notamos que

$$f(A) = [(0, 0), (1, 0)] \cup [(0, 0), (1, 0)],$$

donde la notación $[\bar{a}, \bar{b}]$ denota el segmento de recta que une los puntos $\bar{a}$ y $\bar{b}$. En virtud de lo anterior, $f(A)$ es una poligonal, así que, por el teorema que dice que todo conjunto conexo por poligonales es conexo, $f(A)$ es conexo. ■

Note que el Ejemplo 3 muestra que, a pesar de que el dominio no sea conexo, su imagen puede serlo (esto responde la Pregunta (ii)). De hecho, note que la función anterior ES CONTINUA en su dominio. Por ello, sea cuidadoso cuando intente aplicar alguno de los teoremas: siempre recuerde cuáles son las hipótesis y cuáles son las conclusiones de cada teorema.

Para concluir esta sección, damos algunos ejemplos donde se aplica el Teorema 4 (Clase 22) o alguno de sus corolarios.

Ejemplo 4. La circunferencia unitaria $S^1 = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\overline{x}\| = 1\}$ es un conjunto conexo. Esto se obtiene inmediatamente al considerar la función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t))$, la cual cumple que $f([0, 2\pi]) = S^1$ y es continua, así que por el Teorema 4 (Clase 22), S^1 es conexo.

Ejemplo 5. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\overline{x} \in A$, $\overline{y} \in (A \cup A')^{\complement}$ y $f : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua tal que $f(0) = \overline{x}$ y $f(1) = \overline{y}$. Pruebe que existe $t \in (0,1)$ tal que $f(t) \in \operatorname{Fr}(A)$.

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que $f(t) \notin \operatorname{Fr}(A)$ para toda $t \in (0,1)$. Ahora, consideremos

$$B_1 = \{t \in [0,1] \,|\, f(t) \in A\} = f^{-1}(A)$$

y

$$B_2 = \{t \in [0,1] \,|\, f(t) \in \operatorname{ext}(A)\} = f^{-1}(\operatorname{ext}(A))$$

Notamos que $0 \in B_1$ y $1 \in B_2$, así que $B_1 \neq \varnothing \neq B_2$. Por otro lado, es claro que $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ y $B_1 \cup B_2 = [0,1]$.

Como f es continua en $[0,1]$, dado que A es abierto, por la **Proposición 3** de la **Clase 22** se cumple que existe $U \subset \mathbb{R}$ abierto tal que $f^{-1}(A) = U \cap [0,1]$ y también, como $\operatorname{ext}(A)$ es abierto, existe $V \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $f^{-1}(\operatorname{ext}(A)) = V \cap [0,1]$.

Ahora, por construcción $[0,1] \subseteq U \cup V$ y también $U \cap [0,1] \neq \varnothing \neq V \cap [0,1]$. Además, ya que $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, se cumple que $[0,1] \cap U \cap V = \varnothing$. Por lo tanto, U y V cumplen las condiciones de la **Proposición 5** de la **Clase 12** (una caracterización de conjuntos disconexos), lo cual implica que $[0,1]$ es disconexo, pero esto es una contradicción porque $[0,1]$ es conexo. Por lo tanto, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $f(t_0) \in \operatorname{Fr}(A)$. ■

Ejemplo 6. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en A, con A conexo y tal que $\|f(\overline{x})\| \neq 1$ para toda $\overline{x} \in A$. Pruebe que si $\|f(\overline{x}_0)\| < 1$ para alguna $\overline{x}_0 \in A$, entonces $\|f(\overline{x})\| < 1$ para toda $\overline{x} \in A$.

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que existe $\overline{x}_1 \in A$ tal que

$$\|f(\overline{x}_1)\| > 1.$$

Notemos que la función norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función continua, por lo cual $\|\cdot\| \circ f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua. Como A es conexo, se cumple el **Teorema del Valor Intermedio** (ver **Corolario 6** de la **Clase 22**), por lo cual existe $\overline{x}_2 \in A$ tal que $\|f(\overline{x}_2)\| = 1$, lo cual contradice la hipótesis de que $\|f(\overline{x})\| \neq 1$ para toda $\overline{x} \in A$. Por lo tanto, $\|f(\overline{x})\| < 1$ para toda $\overline{x} \in A$. ■

Continuidad y conjuntos cerrados y acotados

En esta sección nos centraremos en la relación entre continuidad y la preservación de los conjuntos cerrados y acotados.

Teorema 9 (Clase 23). Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ con $B \subseteq A$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función continua en A. Si B es cerrado y acotado, entonces $f(B)$ es cerrado y acotado.

Antes de hacer aplicaciones interesantes de dicho teorema, nuevamente, es conveniente ganar intuición, para ello daremos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 7. La circunferencia unitaria S^1 (vea el Ejemplo 4) es un conjunto cerrado y acotado. Para ello basta aplicar el Teorema 9 (Clase 23) a la función definida en dicha nota. ■

Pregunta. *¿Cómo modificar el ejemplo anterior para demostrar que cualquier circunferencia es cerrada y acotada?*

Ejemplo 8. Sea $r > 0$. Consideremos $A = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subseteq \mathbb{R}^2$. Definimos $f : A \to \mathbb{R}^3$ mediante

$$f(x, y) = (r\cos(x)\operatorname{sen}(y), r\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), r\cos(y)).$$

Claramente la función f es continua porque lo son las funciones coordenadas y se cumple que A es un conjunto cerrado y acotado (¿por qué?). Finalmente, al aplicar el Teorema 9 (Clase 23) obtenemos que $f(A)$ es cerrado y acotado. ■

Pregunta. *¿Puede describir geométricamente a $f(A)$?*

La experiencia de la sección anterior (en el estudio de continuidad y conexidad) nos dice que debemos ser cuidadosos al dar conclusiones acerca de las imágenes de funciones. ¿qué casos pueden ocurrir?

Ejemplo 9. Sea $A = [0, 1] \cup [2, 3] \subseteq \mathbb{R}$. Definimos $f : A \to \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{si } t \in [0, 1], \\ (0, t-2) & \text{si } t \in [2, 3]. \end{cases}$$

Esta función la vimos en el Ejemplo 3. Observamos que el dominio no es conexo, pero sí es cerrado y acotado. Además, como se mencionó, la función f es continua en A, así que podemos aplicar el Teorema (9 (Clase 23)) y obtenemos que $f(A)$ es cerrado y acotado. ■

El ejemplo anterior nos ilustra que nuestro dominio puede tener "varias piezas" y que debemos estar muy atentos a la hipótesis de continuidad.

Ejemplo 10. Sea $A = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$. Consideremos $f : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función se estudió en el Ejemplo 2. Vimos que f no es continua en 0 y $f(A) = [0, \infty)$. Notamos que A y $f(A)$ son conjuntos cerrados, así, f "manda" un conjunto cerrado en un conjunto cerrado aunque no es continua. ■

Ejemplo 11. Sea $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \frac{1}{x},\; x \neq 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Tenemos que G es un conjunto cerrado (¿por qué?). Ahora, si consideramos $p : G \to \mathbb{R}$ definida por $p(x,y) = x$, entonces p es una función continua y $p(G) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, esto es, $p(G)$ NO es un conjunto cerrado. ■

Los Ejemplos 9 y 10 nos ilustran lo que puede suceder con las imágenes de conjuntos cerrados, así que es conveniente saber qué puede ocurrir con las imágenes de conjuntos acotados o de conjuntos no acotados.

Ejemplo 12. Sea $A = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$. Si consideramos la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x}$, entonces f es continua y $f(A) = (0, 1]$. Este muestra que la imagen de un conjunto no acotado bajo una función continua puede ser acotada. ■

Ejemplo 13. Sea $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}$. Tenemos que la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan(x)$ es una función continua con $f(A) = \mathbb{R}$. Así, la imagen de un conjunto acotado bajo una función continua puede ser no acotada. ■

¿Qué tan extraño puede ser el comportamiento de una función al aplicarse sobre un conjunto cerrado y acotado? ¿Es necesario que la función sea continua (en todo su dominio) para que la imagen de un conjunto cerrado y acotado sea un conjunto cerrado y acotado?

Ejemplo 14 (Función *palomita de maíz* o función de Thomae)**.** Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ con } p, q \in N \text{ y } \operatorname{mcd}(p,q) = 1,\; x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Tenemos que f es acotada por definición (todas sus imágenes pertenecen al intervalo $[0,1]$). Recordamos del curso de Cálculo 1 que sabemos más información de esta función:

(i). Si $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, entonces f NO es continua en x.

(ii). Si $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, entonces f SÍ es continua en x.

Notemos que podemos decir aún más acerca de la imagen de f, de hecho, explícitamente tenemos que

$$f([0,1]) = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\},$$

por lo cual podemos afirmar que $f([0,1])$ es un conjunto cerrado (¿recuerda cómo se demuestra esto?). Así, $f([0,1])$ es un conjunto cerrado y acotado a pesar de que f no es una función continua en su dominio. ■

Ejemplo 15. Sea $A = (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$. Consideremos la función $f : A \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t))$. Notamos que $f(A) = S^1$ la circunferencia unitaria ya que si $(x,y) \in f(A)$, entonces $x^2 + y^2 = 1$ (¿Puede demostrar la otra contención?). Así, $f(A)$ es un conjunto cerrado y acotado en virtud del Ejemplo 7. ■

Note que el Ejemplo 15 muestra que, a pesar de que el dominio de la función no es acotado ni cerrado, su imagen sí es cerrada y acotada. De hecho, note que la función anterior ES CONTINUA en su dominio. Por ello, como se señaló en la sesión anterior, sea cuidadoso cuando intente aplicar alguno de los teoremas: siempre recuerde cuáles son las hipótesis y cuáles son las conclusiones de cada teorema.

Para concluir esta sección, damos algunos ejemplos donde se aplica el Teorema 9 (Clase 23).

Ejemplo 16. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, cerrado y acotado, y $\overline{y} \in A^{\complement}$. Pruebe que existe $\overline{x}_0 \in A$ tal que $\|\overline{x}_0 - \overline{y}\| \leq \|\overline{x} - \overline{y}\|$ para toda $\overline{x} \in A$. ¿La afirmación anterior no es válida si no suponemos que A es cerrado. ¿Ésta afirmación sigue siendo cierta si únicamente suponemos que A es cerrado?

Demostración. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(\overline{x}) = \|\overline{x} - \overline{y}\|$. Observamos que f es la composición de $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $g(\overline{x}) = \overline{x} - \overline{y}$ y $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función norma, las cuales son continuas en su dominio, lo cual implica que $f = \|\cdot\| \circ g$ es una función continua. Así, por el **Corolario 11** de la **Clase 23**, obtenemos que f alcanza su mínimo, es decir, existe $\overline{x}_0 \in A$ tal que $f(\overline{x}_0) \leq f(\overline{x})$ para toda $\overline{x} \in A$, es decir, $\|\overline{x}_0 - \overline{y}\| \leq \|\overline{x} - \overline{y}\|$ para toda $\overline{x} \in A$. Esto prueba lo deseado.

La respuesta a la primera pregunta es NO. Considere, por ejemplo $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ y $y = b + 1$. Note que en este caso A no es un conjunto cerrado.

Para responder a la segunda pregunta, supongamos que A es un conjunto cerrado y no acotado. También, consideremos la misma función $f : A \to \mathbb{R}$ definida anteriormente. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\overline{y} = \overline{0} \in A^{\complement}$ (en caso necesario, componemos con $h(\overline{x}) = \overline{x} - \overline{y}$). Sea $B = f(A) = \{\|\overline{x}\| \mid \overline{x} \in A\}$ (aquí es donde estamos usando la hipótesis adicional de que $\overline{y} = \overline{0}$). Como $B \neq \varnothing$ y es acotado inferiormente por cero, entonces existe $\beta = \inf B$. Veamos que $\beta \in B$. Como $\beta \in B'$ por definición de ínfimo (¿recuerda cómo demostrar este hecho?), existe una sucesión $\{\beta_k\}$ en B tal que $\{\beta_k\}$ converge a β y $\beta_k \neq \beta$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Ya que los elementos de B son imágenes de puntos en A, podemos tomar $\overline{x}_k \in A$ tal que $f(\overline{x}_k) = \|\overline{x}_k\| = \beta_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Ahora, para $\varepsilon_0 = 1 > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq N$ entonces $|\|\overline{x}_k\| - \beta| < 1$, lo cual implica que si $k \geq N$ entonces $\|\overline{x}_k\| < 1 + \beta$. Esto demuestra que para toda $k \geq N$ se tiene que $\overline{x}_k \in B_{1+\beta}(\overline{0})$. En virtud de lo anterior, $\{\overline{x}_{k+N}\}$ es una sucesión acotada en A, lo cual implica que tiene una subsucesión $\{\overline{x}_l\}$[1] que es convergente. Supongamos que $\{\overline{x}_l\}$ converge a $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Como A es cerrado, obtenemos que $\overline{x}_0 \in A$. Como f es continua (en A), obtenemos que $\{\|\overline{x}_l\|\}$ converge a $\|\overline{x}_0\|$. Pero $\{\|\overline{x}_l\|\}$ es una subsucesión de la sucesión $\{\|\overline{x}_k\|\}$, la cual converge a β, lo cual implica (por el teorema que dice que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es convergente y converge al mismo límite, y por el teorema de la unicidad del límite) que $\|\overline{x}_0\| = \beta$. Por lo tanto, $\beta \in B$ pues lo anterior muestra que es la imagen de un punto de A. Esto significa que f alcanza su mínimo en A. Por lo tanto, si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y no vacío y $\overline{y} \in A^{\complement}$, entonces existe $\overline{x}_0 \in A$ tal que para toda $\overline{x} \in A$ se cumple que $\|\overline{x}_0 - \overline{y}\| \leq \|\overline{x} - \overline{y}\|$. ■

Pregunta. *¿Puede reescribir la solución a la pregunta 2 sin suponer que $\overline{y} = \overline{0}$?*

Ejemplo 17. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua e inyectiva en A, con A cerrado y acotado. Entonces $f^{-1} : f(A) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, la función inversa de f, es continua en $f(A)$.

[1] Aquí se sumplificó la notación para no hacerla muy pesada.

Demostración. Para evitar confusiones respecto a la preimagen y la función inversa, denotemos $g = f^{-1}$.

Usaremos el inciso a) del **Ejercicio 3** de la **Tarea 4**. Lo enunciamos a continuación como un lema.

Lema (Ejercicio 3 a)). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se satisface que f es continua en A sí y sólo si para todo conjunto cerrado $C \subset \mathbb{R}^m$ existe un subconjunto cerrado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(C) = D \cap A$. ∎

Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado. Entonces $B \cap A$ es cerrado (¿por qué?), y como A es acotado, entonces $A \cap B$ es también acotado. Luego, como f es continua, por el Teorema 9 (Clase 23), $f(A \cap B)$ es cerrado y acotado. Además, $f(A \cap B) \subseteq f(A)$. A continuación, demostraremos que

$$g^{-1}(B) = f(A \cap B).$$

Por un lado, si $\overline{x} \in g^{-1}(B)$, entonces $g(\overline{x}) \in B$, de donde $\overline{x} = f(g(\overline{x})) \in f(B)$. Note que $\overline{x} \in f(A)$ porque $\overline{x}$ es un punto del dominio de g. Lo anterior implica que $\overline{x} \in f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$, donde la igualdad de conjuntos se obtiene porque f es una función inyectiva (¿recuerda este resultado?). Esto prueba una contención.

Por otro lado, si $\overline{x} \in f(A \cap B)$, entonces $g(\overline{x}) \in f^{-1}(f(A \cap B)) = A \cap B$ [2] porque f es inyectiva. Lo anterior significa que $g(\overline{x}) \in A \cap B \subset B$, es decir, $\overline{x} \in g^{-1}(B)$. Esto prueba la segunda contención.

Todo lo anterior prueba que $g^{-1}(B) = f(A \cap B) \cap f(A)$. Finalmente, el **Lema** implica que g es una función continua. ∎

[2] Observe que en este caso, estamos considerando la preimagen de $f(A \cap B)$ bajo f, y por ello uso el símbolo f^{-1} y no el símbolo g.