Ayudantía 19
Continuidad uniforme y compacidad

Iniciaremos esta sesión con un ejemplo que complementa el **Ejemplo 6** de la **Clase 24** dado por Oscar.

Ejemplo 1. La función $f : A = \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{\|\overline{x}\|},$$

es uniformemente continua sobre cualquier subconjunto $B \subseteq A$ que no tenga a $\overline{0}$ como punto de acumulación.

Demostración. Sea $B \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$ tal que $\overline{0} \notin B'$. Como $\overline{0} \notin B'$, entonces existe $r_0 > 0$ tal que $\dot{B}_{r_0}(\overline{0}) \cap B = \varnothing$. Ya que $\overline{0} \notin B$, se tiene que $B_{r_0}(\overline{0}) \cap B = \varnothing$. Tenemos que $C = \{\|\overline{x}\| \mid \overline{x} \in B\}$ es un conjunto no vacío y acotado inferiormente por cero, así que existe $\beta = \inf C$. Veamos que $\beta > 0$. Por contradicción, supongamos que $\beta = 0$; entonces, como $\dfrac{r_0}{2} > 0$ no es cota inferior, existe $\overline{x}_1 \in B$ tal que $\beta = 0 < \|\overline{x}_1\| \leq \dfrac{r_0}{2}$, lo cual implica que $\overline{x}_1 \in B_{r_0}(\overline{0}) \cap B$, lo cual es una contradicción a la elección de r_0. Por lo tanto, $\beta > 0$.

Ahora, notamos que para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in B$ se cumple que

$$|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| = \left| \frac{1}{\|\overline{x}\|} - \frac{1}{\|\overline{y}\|} \right| = \left| \frac{\|\overline{y}\| - \|\overline{x}\|}{\|\overline{x}\|\ \|\overline{y}\|} \right| \leq \frac{\|\overline{y} - \overline{x}\|}{r_0^2} \tag{1}$$

donde la última desigualdad se obtiene porque $|\|\overline{y}\| - \|\overline{x}\|| \leq \|\overline{y} - \overline{x}\|$ para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ y, por lo mostrado en el párrafo anterior, $r_0 \leq \|\overline{z}\|$ para toda $\overline{z} \in B$.

Finalmente, dada $\varepsilon > 0$, basta considerar $\delta = \varepsilon r_0^2$ para que si $\overline{x}, \overline{y} \in B$ cumplen que $\|\overline{y} - \overline{x}\| < \delta$, entonces por la ecuación (1) se cumple que

$$|f(\overline{y}) - f(\overline{x})| \leq \frac{\|\overline{y} - \overline{x}\|}{r_0^2} < \frac{\varepsilon r_0^2}{r_0^2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que f es uniformemente continua en B. ∎

Para continuar, se resolverán algunos problemas que utilizarán todos los conceptos que se han estudiado hasta ahora.

Ejemplo 2. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. Se satisface que K es compacto sí y sólo si toda sucesión $\{\overline{x}_k\}$ contenida en K tiene una subsucesión $\{\overline{x}_{k_l}\}$ que converge a un punto $\overline{x}_0 \in K$.

Demostración. Si K es compacto, entonces por el Teorema de Heine-Borel obtenemos que es un conjunto cerrado y acotado. Entonces cualquier sucesión en K es acotada, así que para existe una subsucesión convergente (¿recuerda por qué?). Luego, ya que K es cerrado, la subsucesión converge a un punto que pertenece a K (¿qué resultado lo asegura?).

Para la implicación recíproca procedemos por contradicción. Supongamos que K no es compacto, entonces, por el Teorema de Heine-Borel se sigue que K no es cerrado o no es acotado. Si K no es cerrado, entonces, existe $\overline{x}_0 \in \overline{K} \setminus K$, así que existe una sucesión $\{\overline{x}_k\}$ contenida en K que converge a $\overline{x}_0$, pero ello implica que cualquier subsucesión converge a $\overline{x}_0 \notin K$, lo cual contradice la hipótesis. Ahora, si K no es acotado, entonces construimos inductivamente una sucesión $\{\overline{x}_k\}$ contenida en K

como sigue: tomemos $\overline{x}_1 \in K$. Supongamos que hemos construido $\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\}$. Construyamos $\overline{x}_{k+1}$. Para ello, tomemos $\overline{x}_{k+1} \in B_k(\overline{x_1}) \setminus B_{k-1/2}(\overline{x}_1)$. Esto termina la construcción. Así, por contrucción, la sucesión $\{\overline{x}_k\}$ cumple que $\|\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k\| > 1/2$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Ahora, por la hipótesis, existe una subsucesión $\{\overline{x}_{k_l}\}$ de $\{\overline{x}_k\}$ que converge en K. Esto implica que $\{\overline{x}_{k_l}\}$ es una sucesión de Cauchy (¿recuerda la razón?), de donde existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, r \geq N$ entonces $\|\overline{x}_{k_m} - \overline{x}_{k_r}\| < 1/2$, lo cual contradice la construcción de $\{\overline{x}_k\}$. ■

Recordamos el siguiente resultado.

Teorema 8 (Clase 24). Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $K \subseteq A$. Si K es compacto y f es continua en K, entonces f es uniformemente continua en K.

Ejemplo 3. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado, y $f : [a,b] \times A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b] \times A \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Definimos $h : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$h(\overline{y}) = \int_a^b f(x, \overline{y})\ dx.$$

Entonces h es uniformemente continua en A.

Demostración. Ya que A es cerrado y acotado, por el Teorema de Heine-Borel obtenemos que A es compacto. En primer lugar veremos que la función h es continua en A. Para ello, sea $\overline{y}_0 \in A$ y veamos que h es continua en $\overline{y}_0$. Notamos que si $\overline{y} \in A$ entonces

$$\begin{aligned} |h(\overline{y}) - h(\overline{y}_0)| &= \left| \int_a^b f(x, \overline{y})\ \mathrm{dx} - \int_a^b f(x, \overline{y}_0)\ \mathrm{dx} \right| \\ &\leq \left| \int_a^b (f(x, \overline{y}) - f(x, \overline{y}_0))\ \mathrm{dx} \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, \overline{y}) - f(x, \overline{y})|\, \mathrm{dx}. \end{aligned} \tag{2}$$

También, como $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos cerrados y acotados obtenemos que $[a,b] \times A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es cerrado y acotado. Luego, por el Teorema de Heine-Borel, se sigue que $[a,b] \times A$ es compacto. Ahora, como f es continua en $[a,b] \times A$, por el Teorema 8 (Clase 24) se sigue que f es uniformemente continua en $[a,b] \times A$.

Sea $\varepsilon > 0$. Ya que f es uniformemente continua en $[a,b] \times A$, existe $\delta_0 > 0$ tal que para cualesquiera $(x, \overline{y}), (z, \overline{w}) \in [a,b] \times A$ tales que $\|(x, \overline{y}) - (z, \overline{w})\| < \delta_0$ se cumple que

$$|f(x, \overline{y}) - f(z, \overline{w})| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{3}$$

Proponemos $\delta = \delta_0$. Sea $\overline{y} \in B_\delta(\overline{y}_0)$. Notemos que para toda $x \in [a,b]$ se cumple que

$$\|(x, \overline{y}) - (x, \overline{y}_0)\| = \|(0, \overline{y} - \overline{y}_0)\| < \delta,$$

así que por la ecuación (3) obtenemos que para toda $x \in [a,b]$ se satisface la desigualdad

$$|f(x, \overline{y}) - f(x, \overline{y}_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{4}$$

Luego, al utilizar las desigualdades (2) y (4) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}|h(\overline{y}) - h(\overline{y}_0)| &\leq \int_a^b |f(x,\overline{y}) - f(x,\overline{y}_0)|\mathrm{dx} \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que h es continua en $\overline{y}_0$ y, por lo tanto, que h es continua en A. Finalmente, por el Teorema 8 (Clase 24) concluimos que h es uniformemente continua en A porque A es compacto. Esto termina la prueba. ∎

Ejemplo 4 (Aplicación del Ejemplo 3.)**.** Consideremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ y $A \subset \mathbb{R}^2$ cerrado y acotado (puede pensar que $A = S^1$, o bien, que $A = [0,1] \times [28, 750]$, o bien en su conjunto cerrado y acotado favorito). Definimos $f : [a,b] \times A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,(y,z)) = xyz$. Observamos que f es continua en $[a,b] \times A$. Consideremos la función $h : A \to \mathbb{R}$ definida como en el Ejemplo 3, esto es,

$$h(y,z) = \int_a^b f(x,(y,z))\ dx = \int_a^b xyz\ dx.$$

Ya que al evaluar h en (y,z) estamos fijando el valor de y y el de z, entonces podemos considerar que son constantes[1] y con ello obtener que

$$h(y,z) = yz\int_a^b x\ dx = \left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right)yz.$$

Notamos que f es uniformemente continua en $[a,b] \times A$ en virtud del Teorema 8 (Clase 24) y, al aplicar el resultado del Ejemplo 3, obtenemos que h es uniformemente continua en A. Note que, de hecho, se puede argumentar que h es uniformemente continua en A en virtud del Teorema 8 (Clase 24) (¿puede decir por qué?).

Ejemplo 5. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uniformemente continua en A y $\{\overline{x}_k\}$ una sucesión de Cauchy contenida en A. Pruebe que $\{f(\overline{x}_k)\}$ es una sucesión de Cauchy.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en A, existe $\delta > 0$ tal que si $\overline{x}, \overline{y} \in A$ cumple que $\|\overline{x} - \overline{y}\| < \delta$, entonces $\|f(\overline{x}) - f(\overline{y})\| < \varepsilon$. Ahora, ya que $\{\overline{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $l, m \geq N$ entonces $\|\overline{x}_m - \overline{x}_l\| < \delta$. Esto implica que si $m, l \geq N$ entonces $\|f(\overline{x}_m) - f(\overline{x}_l)\| < \varepsilon$. Esto prueba lo deseado. ∎

Demostraremos el siguiente resultado de extensión de funciones uniformemente continuas.

Teorema A. (Extensión de funciones uniformemente continuas) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uniformemente continua en A. Entonces existe $\overline{f} : \overline{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uniformemente continua en $\overline{A}$ tal que $\overline{f}(\overline{x}) = f(\overline{x})$ para toda $\overline{x} \in A$.

Demostración. Haremos esta prueba en etapas.

Afirmación 1. Si $\overline{x}_0 \in A'$, entonces existe $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x})$.

[1] Estudiará con mayor profundidad este hecho en el siguiente curso de Cálculo.

Para probar la Afirmación 1 usaremos la equivalencia entre la existencia del límite de una función y la convergencia de sucesiones de imágenes. Sea $\{\overline{x}_k\}$ una sucesión en $A \smallsetminus \{\overline{x}_0\}$ que converge a $\overline{x}_0$. Ya que una sucesiíon es convergente si y sólo si es de Cauchy, obtenemos que $\{\overline{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy. Luego, como f es uniformemente continua en A y $\{\overline{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy en A, por el Ejemplo 5 se sigue que $\{f(\overline{x}_k)\}$ es también una sucesión de Cauchy, y la equivalencia entre ser sucesión de Cauchy y ser sucesión convergente implica que $\{f(\overline{x}_k)\}$ es una sucesión convergente.

Note que para concluir que el límite deseado existe, falta mostrar que todas las sucesiones $\{f(\overline{x}_k)\}$ convergen al mismo valor. Sean $\{\overline{x}_k\}$ y $\{\overline{y}_k\}$ sucesiones en $A \smallsetminus \{\overline{x}_0\}$ que convergen a $\overline{x}_0$. Por lo dicho en el párrafo anterior sabemos que las sucesiones $\{f(\overline{x}_k)\}$ y $\{f(\overline{y}_k)\}$ convergen. Supongamos que $\{f(\overline{x}_k)\}$ converge a $\overline{p}$ y que $\{f(\overline{y}_k)\}$ converge a $\overline{q}$. Consideremos la sucesión $\{\overline{w}_l\}$ definida como sigue:

$$\overline{w}_l = \begin{cases} \overline{x}_{(l+1)/2} & \text{si } l \text{ es impar,} \\ \overline{y}_{l/2} & \text{si } l \text{ es par.} \end{cases}$$

Observamos que $\{\overline{w}_l\}$ converge a $\overline{x}_0$ por definición. Por lo tanto, $\{f(\overline{w}_l)\}$ converge a $\overline{z}$. Como $\{f(\overline{x}_k)\}$ es una subsucesión de $\{f(\overline{w}_l)\}$, se obtiene que $\overline{p} = \overline{z}$; análogamente, como $\{f(\overline{y}_k)\}$ es subsucesión de $\{f(\overline{w}_l)\}$ se sigue que $\overline{q} = \overline{z}$. Por lo tanto $\overline{p} = \overline{q}$, de donde se obtiene el resultado deseado. Esto prueba la Afirmación 1.

Definimos $\overline{f} : \overline{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por

$$\overline{f}(\overline{x}) = \begin{cases} f(\overline{x}) & \text{si } \overline{x} \in A, \\ \lim\limits_{\overline{z} \to \overline{x}} f(\overline{z}) & \text{si } \overline{x} \in A'. \end{cases} \tag{5}$$

Vemos que si $\overline{x} \in A \cap A'$, entonces $\overline{f}(\overline{x})$ está bien definido porque f es continua. Observe que también, por definición, $\overline{f}$ es continua.

Afirmación 2. La función $\overline{f}$ es uniformemente continua en $\overline{A}$.

Haremos la prueba por definición. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en A, existe $\delta_0 > 0$ tal que si $\overline{x}, \overline{y} \in A$ cumplen que $\|\overline{x} - \overline{y}\| < \delta_0$, entonces

$$\|f(\overline{x}) - f(\overline{y})\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Notamos que si $\overline{z} \in \overline{A}$, como $\overline{f}$ es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\overline{w} \in A$ cumple que $\|\overline{w} - \overline{z}\| < \delta_1$, entonces

$$\|\overline{f}(\overline{w}) - \overline{f}(\overline{z})\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7}$$

Proponemos $\delta = \text{mín}\{\delta_0/3, \delta_1\}$. Sean $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{A}$ tales que $\|\overline{x} - \overline{y}\| < \delta$. Sean $\overline{p} \in B_\delta(\overline{x}) \cap A$ y $\overline{q} \in B_\delta(\overline{y}) \cap A$. Note que ambas intersecciones son no vacías: si $\overline{x}$ era un punto aislado de A, sigue siendo un punto aislado de $\overline{A}$ (y en este caso podemos tomar $\overline{p} = \overline{x}$); si $\overline{x} \in A'$, entonces por definición de punto de acumulación la intersección es no vacía; análogamente para $\overline{y}$. Entonces, por (7) obtenemos que

$$\|\overline{f}(\overline{p}) - \overline{f}(\overline{x})\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{8}$$

y también que

$$\|\overline{f}(\overline{q}) - \overline{f}(\overline{y})\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Además, observamos que

$$\|\overline{p} - \overline{q}\| \leq \|\overline{p} - \overline{x}\| + \|\overline{x} - \overline{q}\|$$

$$\le \|\overline{p}-\overline{x}\| + \|\overline{x}-\overline{y}\| + \|\overline{y}-\overline{q}\|$$
$$< 3\delta \le 3\frac{\delta_0}{3} = \delta_0,$$

de donde por (6) obtenemos que

$$\|\overline{f}(\overline{p}) - \overline{f}(\overline{q})\| = \|f(\overline{p}) - f(\overline{q})\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

A partir de la desigualdades (8), (9) y (10) se sigue que

$$\begin{aligned}\|\overline{f}(\overline{x}) - \overline{f}(\overline{y})\| &\le \|\overline{f}(\overline{p}) - \overline{f}(\overline{x})\| + \|\overline{f}(\overline{y}) - \overline{f}(\overline{p})\| \\ &\le \|\overline{f}(\overline{p}) - \overline{f}(\overline{x})\| + \|\overline{f}(\overline{q}) - \overline{f}(\overline{y})\| + \|\overline{f}(\overline{q}) - \overline{f}(\overline{p})\| \\ &< 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto termina la prueba. ∎

Terminamos esta sesión (y el capítulo) con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. Definimos $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$f_A(\overline{x}) = d(\overline{x}, A) := \inf\{\|\overline{x}-\overline{y}\| \,|\, \overline{y} \in A\}.$$

Se satisface que:

(i). $f_A(\overline{x}) = 0$ sí y sólo si $\overline{x} \in \overline{A}$.

(ii). f_A es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

(iii). Considere $B \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. Si A y B están separados, entonces existen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$.

Demostración. (i) Para probar la primera implicación supongamos que $f_A(\overline{x}) = 0$. Entonces $d(\overline{x}, A) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces ε no es cota inferior de $\{\|\overline{y}-\overline{x}\| \mid \overline{y} \in A\}$, por lo cual existe $\overline{y}_0 \in A$ tal que $\|\overline{y}_0 - \overline{x}\| < \varepsilon$, es decir, $\overline{y}_0 \in B_\varepsilon(\overline{x}) \cap A$. Esto implica que $\overline{x} \in \overline{A}$ (¿por qué?).

Para la segunda implicación supongamos que $\overline{x} \in \overline{A}$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\overline{y} \in B_\varepsilon(\overline{x}) \cap A$, es decir, $\|\overline{y}-\overline{x}\| < \varepsilon$. Por lo anterior, $d(\overline{x}, A) < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, de donde se sigue que $d(\overline{x}, A) = 0$ (porque $d(\overline{x}, A) \ge 0$). Esto prueba que $f_A(\overline{x}) = 0$.

(ii) Para demostrar la continuidad uniforme demostraremos que para cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$|f_A(\overline{x}) - f_A(\overline{y})| \le \|\overline{x}-\overline{y}\|. \tag{11}$$

Notamos que, por la desigualdad del triángulo, para toda $\overline{z} \in A$ se cumple que

$$\|\overline{y}-\overline{z}\| + \|\overline{x}-\overline{y}\| \le \|\overline{z}-\overline{x}\|. \tag{12}$$

Al tomar ínfimos sobre A en (12), obtenemos que

$$\inf\{\|\overline{y}-\overline{z}\| - \|\overline{x}-\overline{y}\| \mid \overline{z} \in A\} \le \inf\{\|\overline{z}-\overline{x}\| \mid \overline{z} \in A\} = d(\overline{x}, A). \tag{13}$$

Como $\|\overline{x}-\overline{y}\|$ es constante se cumple que

$$\inf\{\|\overline{y}-\overline{z}\| - \|\overline{x}-\overline{y}\| \mid \overline{z} \in A\} = \inf\{\|\overline{y}-\overline{z}\| \mid \overline{z} \in A\} - \|\overline{x}-\overline{y}\|$$

$$= d(\overline{y}, A) - \|\overline{x} - \overline{y}\|. \tag{14}$$

Luego, al sustituir (14) en (13) obtenemos que

$$d(\overline{y}, A) - \|\overline{x} - \overline{y}\| \leq d(\overline{x}, A),$$

de donde se sigue que

$$f_A(\overline{y}) = d(\overline{y}, A) \leq d(\overline{x}, A) + \|\overline{x} - \overline{y}\| = f_A(\overline{x}) + \|\overline{x} - \overline{y}\|.$$

Por lo tanto

$$f_A(\overline{y}) - f(\overline{x}) \leq \|\overline{x} - \overline{y}\|. \tag{15}$$

De manera análoga obtenemos que

$$f_A(\overline{x}) - f(\overline{y}) \leq \|\overline{x} - \overline{y}\|,$$

es decir

$$-\|\overline{x} - \overline{y}\| \leq f_A(\overline{y}) - f(\overline{x}). \tag{16}$$

A partir de (15) y (16) se sigue la ecuación (11). Por lo tanto, dada $\varepsilon > 0$ basta pedir $\delta = \varepsilon$ para obtener la conclusión deseada.

(iii) Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ como en el enunciado del problema. Entonces $\overline{A} \cap B = \varnothing$ y $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(\overline{x}) = f_A(\overline{x}) - f_B(\overline{x})$. Tenemos que si $\overline{x} \in A$ entonces $f(\overline{x}) = -f_B(\overline{x})$ porque $f_A(\overline{x}) = 0$. También, si $\overline{y} \in B$ entonces $f(\overline{y}) = f_A(\overline{y})$ porque $f_B(\overline{y}) = 0$. Por lo dicho antes, si $\overline{x} \in A$, entonces $\overline{x} \notin \overline{B}$, lo cual implica que $f(\overline{x}) < 0$ para toda $\overline{x} \in A$. Análogamente, si $\overline{y} \in B$, entonces $\overline{y} \notin \overline{A}$, de donde se sigue que $f(\overline{y}) > 0$ para toda $\overline{y} \in B$ (note que estamos usando el inciso (i)). Como f_A y f_B son funciones continuas (porque son uniformemente continuas), obtenemos que f es una función continua. Por lo tanto, $V = f^{-1}((0, \infty)) \subset \mathbb{R}^n$ y $U = f^{-1}((-\infty, 0)) \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos y cumplen que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$. ∎